БИБЛИОТЕКА
РУССКОЙ
НАУКИ

БИБЛИОТЕКА РУССКОЙ НАУКИ

математика
механика
физика
астрономия

МИНИСТЕРСТВО КУЛЬТУРЫ СССР — ГЛАВИЗДАТ
Государственное издательство
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва - 1953

Н. Н. ЛУЗИН

ЛЕКЦИИ ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Редакция, предисловие и примечания
Л. В. КЕЛДЫШ и П. С. НОВИКОВА

МИНИСТЕРСТВО КУЛЬТУРЫ СССР — ГЛАВИЗДАТ
Государственное издательство
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва - 1953

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ

Дескриптивная теория множеств возникла в связи с проблемой об измеримости множеств. В различных разделах математики, особенно в анализе, постоянно возникает вопрос об измеримости того или иного множества или измеримости некоторой функции. Поэтому очень важно иметь средства для доказательства измеримости множеств и функций.

Практически все известные до сих пор доказательства измеримости некоторого множества связаны с указанием процесса, с помощью которого это множество может быть построено, т. е. его дескриптивной структуры. Вопрос же об измеримости некоторой функции $f(x)$ сводится к вопросу об измеримости ее лебеговских множеств, т. е. множеств $[f(x)>a]$. Одно из первых определений меры было дано Борелем. Множества, измеримые по Борелю, получившие впоследствии название множеств, измеримых B или B-множеств, это — множества, которые могут быть получены, отправляясь от интервалов, с помощью счетно-кратного применения операций суммирования и пересечения счетного числа множеств. Впоследствии, когда Лебег ввел свое определение меры множества,— класс измеримых множеств оказался значительно шире класса множеств, измеримых B. В связи с этим возник вопрос об отыскании насколько возможно более широких классов измеримых множеств и функций.

Простейшие разрывные функции были изучены Бэром. Он указал трансфинитную классификацию разрывных функций, которые могут быть получены счетно-кратным применением операции перехода к пределу, отправляясь от непрерывных функций, и построил примеры функций первых трех классов. Лебег доказал, что множества, измеримые B, являются лебеговскими множествами для функций классификации Бэра и классифицируются по классам, соответствующим классам функций классификации Бэра. Он доказал непустоту всех классов K_α, где α — натуральное число или трансфинитное число второго класса, и построил без применения аксиомы Цермело пример функции, не входящей в классификацию Бэра, или, что то же — пример множества, неизмеримого B. К этому времени обнаружились, с одной стороны, большие трудности, связанные с континуум-проблемой, а с другой стороны, возможность, с использованием аксиомы Цермело, строить множества, далеко выходящие за пределы множеств, измеримых B, в частности множества, неизмеримые по Лебегу. Благодаря этим обстоятельствам возникла необходимость подробно изучить природу арифметического континуума и его подмножеств, указать процессы построения измеримых множеств и проанализировать способы задания неизмеримых множеств. Эта работа и была предпринята Н. Н. Лузиным.

Исключительное умение Н. Н. Лузина выбрать плодотворное направление, способность правильно поставить задачу и найти нужное определение привели к тому, что вокруг него объединилась большая группа талантливой молодежи, работавшей над поставленными им проблемами. Благодаря тому, что Н. Н. Лузин не только сам интенсивно работал, но и направил большой коллектив молодых ученых на решение наиболее актуальных и трудных задач дескриптивной теории множеств, целый ряд этих задач был решен в течение сравнительно короткого времени.

Основное направление в области дескриптивной теории множеств, которым занимался Н. Н. Лузин и его школа, — это изучение эффективных множеств, т. е. тех множеств, которые можно построить без применения аксиомы Цермело.

Настоящая книга является переводом книги Н. Н. Лузина, впервые изданной в 1930 г. в Париже в серии монографий по теории функций, издававшейся под редакцией Э. Бореля, и содержит изложение основных результатов, полученных в этом направлении Н. Н. Лузиным и рядом его учеников за период 1915—1929 гг.

Первый вопрос, поставленный Лузиным, — это вопрос, не решенный Лебегом, который исследовал множества, измеримые B: содержит ли каждое несчетное множество, измеримое B, совершенное подмножество? Иными словами — имеет ли оно мощность континуума? Этот вопрос был решен в положительном смысле П. С. Александровым, построившим для его решения новую операцию получения множеств, измеримых B, — операцию, получившую название A-операции. П. С. Александров показал, что с помощью A-операции, отправляясь от интервалов, можно получить любое множество, измеримое B, и что всякое множество, полученное таким образом, содержит совершенное подмножество. Тогда Н. Н. Лузин поставил вопрос: можно ли с помощью A-операции над системой интервалов получить множество, неизмеримое B? Этот вопрос был решен М. Я. Суслиным, показавшим, что существует множество, которое получается с помощью A-операции над системой интервалов и неизмеримо B. Множества, получаемые с помощью A-операции над системой интервалов, получили название A-множеств. В тексте книги Н. Н. Лузин называет A-множества «аналитическими множествами». Однако такое название не привилось. В литературе они известны под названием A-множеств или суслинских множеств. Дальнейшее развитие дескриптивной теории множеств было посвящено подробному изучению множеств измеримых B, A-множеств и отысканию эффективных множеств, выходящих за пределы A-множеств.

Первая и вторая главы книги Н. Н. Лузина посвящены теории множеств, измеримых B. В первой главе, которая носит вводный характер, изложены различные операции, с помощью которых могут быть получены множества, измеримые B, и установлены связи между ними. Глава II содержит подробное изложение теории множеств, измеримых B. Здесь изложены все основные результаты, касающиеся этих множеств, которые были известны к моменту написания книги.

Н. Н. Лузин рассматривает множества, лежащие в пространстве Бэра $\mathcal{J}_x$ — множестве всех иррациональных точек отрезка (или множестве $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_n}$ всех иррациональных точек n-мерного евклидова пространства). При таком изложении формулировки теорем дескриптивной теории множеств получают особую простоту благодаря тому, что рассматриваемое пространство имеет размерность нуль. Н. Н. Лузин принимает классификацию множеств, измеримых B, Бэра — Валле-Пуссена. В этой классификации к нулевому классу K_0

принадлежат все открыто-замкнутые множества пространства $\mathcal{J}_x$. Множество E принадлежит к классу α, если оно является *пределом* последовательности множеств классов $<\alpha$ и не принадлежит ни к какому классу $<\alpha$. Множества класса α разбиваются на *элементы* или множества, *достижимые сверху*, которые являются пересечениями множеств классов $<\alpha$, множества, *достижимые снизу*, которые являются суммами множеств класса $<\alpha$, и *недостижимые*, которые не являются ни пересечениями, ни суммами множеств классов $<\alpha$. Если α — число второго рода, то в классе K_α есть еще множества, *двусторонне достижимые*, которые являются одновременно и пересечениями и суммами множеств классов $<\alpha$. Такие множества составляют базу B_α. Н. Н. Лузин показывает, что каждое множество класса α является суммой элементов классов $\leqslant\alpha$. В главе II изучается вопрос о том, каким образом множество класса α строится из элементов классов $\leqslant\alpha$.

Н. Н. Лузиным введено понятие *отделимости множеств*, которое играет очень важную роль в дескриптивной теории множеств: два непересекающихся множества E_1 и E_2 называются *отделимыми при помощи множеств класса* L, если существуют два непересекающихся множества H_1 и H_2 класса L, одно из которых содержит E_1, а другое — E_2

$$E_1 \subset H_1, \quad E_2 \subset H_2, \quad H_1 H_2 = 0.$$

Лузин показал, что *два непересекающихся элемента класса α всегда отделимы при помощи множеств классов $<\alpha$ или из базы B_α* (если α второго рода). На основании этой теоремы находится критерий неповышения класса, т. е. критерий для того, чтобы счетная сумма элементов класса $\leqslant\alpha$ была множеством класса $\leqslant\alpha$.

Так как множества, измеримые B, строятся из элементов, то Н. Н. Лузин поставил задачу об исследовании структуры элементов класса α, а также о конструктивном построении элементов низших классов. Он излагает здесь пример Бэра элемента класса 3 и пример Л. В. Келдыш — элемента класса 4. Изучение структуры элементов класса α было сделано позднее Л. В. Келдыш (см. Примечания). Наконец, в конце главы Н. Н. Лузин излагает работу М. А. Лаврентьева о разбиении множеств класса α на подклассы в зависимости от того, как эти множества строятся из элементов.

Исследуя вопрос о способах задания множеств, измеримых B, Лузин доказывает важную теорему о регулярном параметрическом изображении множеств, измеримых B. Именно, он показывает, что *всякое множество, измеримое B, если исключить из него не более, чем счетное множество, есть непрерывный и взаимно однозначный образ пространства $\mathcal{J}_x$*.

Эта теорема имеет большое значение в теории A-множеств, так как регулярность изображения множества E, как непрерывного образа $\mathcal{J}_x$, т. е. его взаимная однозначность, является, как показал Лузин (гл. III), достаточной для того, чтобы множество E было измеримо B.

Глава III содержит теорию A-множеств. A-множества — это множества, которые могут быть получены, исходя из системы интервалов пространства $\mathcal{J}_x$ (или параллелепипедов пространства $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \dots x_n}$) с помощью A-операции, открытой П. С. Александровым при решении вопроса о мощности множеств, измеримых B. Из теоремы П. С. Александрова непосредственно следует, что всякое несчетное A-множество содержит совершенное подмножество, следовательно, имеет мощность континуума. Н. Н. Лузин показал, что всякое A-множество измеримо и обладает свойством Бэра[1]).

Лузин поставил вопрос об отыскании критерия для того, чтобы A-множество было неизмеримо B. Такой критерий был найден М. Я. Суслиным, который показал, что *для того, чтобы A-множество E было неизмеримо B, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение CE не было A-множеством*. С этой теоремой был открыт новый класс множеств, — так называемых CA-множеств, которые являются дополнениями к A-множествам, неизмеримым B. Изучение CA-множеств сыграло большую роль в развитии дальнейших работ Н. Н. Лузина в области дескриптивной теории множеств. Первоначально доказательство теоремы Суслина было очень громоздко и использовало совокупность всех трансфинитных чисел второго

---

[1]) Множество E обладает свойством Бэра, если на каждом совершенном множестве найдется порция, на которой либо E, либо его дополнение CE есть множество первой категории.

класса. Н. Н. Лузин затратил много усилий на то, чтобы исключить трансфиниты из доказательства теоремы Суслина. Для этой цели им было найдено оказавшееся чрезвычайно плодотворным понятие об отделимости множеств, о котором мы уже говорили выше, и доказана замечательная теорема, носящая название первого принципа отделимости: *всякие два непересекающиеся A-множества отделимы B*, т. е. отделимы при помощи множеств, измеримых B. Из этой теоремы немедленно вытекает как следствие теорема Суслина.

Вопрос об отделимости B — для CA-множеств был исследован П. С. Новиковым, который доказал, что *существуют два CA-множества, неотделимые B*. Тем самым было выяснено, что отделимость при помощи CA-множеств не сводится к отделимости B, как это имеет место для отделимости при помощи A-множеств, в силу первого принципа отделимости. Тогда Лузин сформулировал и доказал второй принцип отделимости: *если из двух A-множеств E_1 и E_2 выбросить их общую часть, то оставшиеся множества $E_1 - E_2$ и $E_2 - E_1$ отделимы при помощи CA-множеств.*

Стремясь сделать теорию A-множеств и CA-множеств наиболее геометрически ясной и облегчить задачу их исследования, Н. Н. Лузин много занимался изучением различных способов задания A-множеств. В связи с этим изложение теории A-множеств в книге носит несколько особый характер. Н. Н. Лузин совсем не излагает здесь A-операции, той операции, с помощью которой A-множества были открыты, но зато находит и подробно исследует другие, более геометрические способы задания A-множеств. Первым из таких способов является *параметрическое изображение*, иначе говоря, — получение A-множества E как непрерывного образа пространства $\mathcal{J}_x$. При этом, как мы уже указывали, Н. Н. Лузин установил, что если непрерывное отображение взаимно однозначно, то E измеримо B. Затем П. С. Новиков показал, что если параметрическое изображение счетно-кратно (т. е. прообраз каждой точки не более, чем счетен), то множество E также измеримо B. Другой способ задания A-множества, лежащего в пространстве $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \dots x_n}$, есть *проектирование множества, измеримого B*, лежащего в пространстве $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_n y}$. Этот способ основан на теореме Суслина о том, что *всякое A-множество в пространстве $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_n}$ есть проекция множества типа G_δ, лежащего в пространстве $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_n y}$.* И, наконец, очень важный способ задания A-множества, введенный Н. Н. Лузиным, есть задание с помощью ***элементарного решета*** (см. гл. III).

Все эти три способа задания множества эквивалентны A-операции над системой интервалов. Отметим, что в применении к более сложным множествам, в частности — уже к CA-множествам операции проектирования и непрерывного отображения являются более сильными, чем A-операция и операция решета. Если задано элементарное решето C, определяющее A-множество E, то в каждой точке x дополнительного множества CE это решето определяет некоторый трансфинитный индекс α. *Для того чтобы множество E было неизмеримо B, необходимо и достаточно, чтобы его трансфинитные индексы были неограниченны.* Множество $\mathcal{E}_\alpha$ тех точек x множества CE, в которых трансфинитный индекс равен определенному числу α, называется ***конституантой*** с индексом α решета C. *Все конституанты $\mathcal{E}_\alpha$ измеримы B.* Поэтому если множество E неизмеримо B, то решето C определяет разбиение CA-множества CE на $\aleph_1$ множеств, измеримых B. Это обстоятельство оказалось теснейшим образом связано с проблемой о мощности CA-множеств.

Если CA-множество содержит совершенное подмножество, то среди его конституант существует по крайней мере одна несчетная. Если же все конституанты неизмеримого B CA-множества не более чем счетны, то это множество состоит из $\aleph_1$ точек и не содержит совершенного подмножества. Н. Н. Лузин много занимался исследованием трудностей, связанных с проблемой о мощности CA-множеств. В связи с этим он изучал структуру разбиения CA-множества на конституанты. Целый ряд его работ, вышедших после первого издания рассматриваемой книги, посвящен этому вопросу. На страницах своей книги Лузин высказывает мысль, что трудности, связанные с проблемой о мощности CA-множеств, носят принципиальный характер и что она не может быть решена, исходя из принципов классической теории множеств. В настоящее время П. С. Новиков построил

CA-множество, относительно которого непротиворечиво предположение, что оно не содержит совершенного подмножества (Труды ин-та им. Стеклова, т. XXXVIII, 1951 г.). Тем самым показано, что невозможно доказать утверждение, что всякое счетное CA-множество содержит совершенное подмножество.

Четвертая глава посвящена теории неявных функций. Задача ставится следующим образом: дана система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_p) = 0, \\ F_2(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_p) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_q(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_p) = 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

где все F_i — функции классификации Бэра. Требуется найти функции

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m), \qquad (2)$$

удовлетворяющие этой системе уравнений, и изучить дескриптивную структуру этих функций. Точнее, вопрос ставится следующим образом: ***можно ли в случае, когда F_j принадлежат к классификации Бэра, удовлетворить системе* (1) *с помощью функций* (2), *входящих в классификацию Бэра?***

Лебег рассмотрел частный случай, когда каждой точке пространства $\mathcal{J}_{x_1x_2\cdots x_m}$ соответствует не более одной точки $M(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_p)$ пространства $\mathcal{J}_{x_1\cdots x_m y_1\cdots y_p}$, координаты которой удовлетворяют системе (1), т. е. когда неявные функции определены однозначно. В этом случае система (1) имеет однозначное решение и все функции системы (2) принадлежат к классификации Бэра. В общем случае, когда точке пространства $\mathcal{J}_{x_1\cdots x_m}$ может соответствовать более, чем одна точка пространства $\mathcal{J}_{x_1\cdots x_m y_1\cdots y_p}$, координаты которой удовлетворяют системе (1), задача становится значительно сложнее. Легко видеть, что, вообще говоря, система (1) может иметь решения сколь угодно сложной природы. Вопрос заключается в выяснении, существует ли решение системы (1) вида (2), где все функции f_i принадлежат к классификации Бэра? Н. Н. Лузин придал проблеме о неявных функциях чрезвычайно ясную геометрическую форму. Он заметил, что так как все функции F_i принадлежат к классификации Бэра, то множество E всех точек пространства $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_p}$, координаты которых удовлетворяют системе (1), измеримо B. Область существования неявных функций $\mathfrak{E}$ есть проекция множества E в пространстве $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$, т. е., вообще говоря, есть A-множество. Проблема об отыскании решения системы (1) сводится к проблеме о выделении из множества E однозначной поверхности, т. е. такого множества E', которое с каждой гиперплоскостью $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_m = x_m^0$, где точка $M(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ принадлежит к $\mathfrak{E}$, пересекается в точности в одной точке. Эту проблему Н. Н. Лузин называет *проблемой об униформизации множества E.* Тогда задача о неявных функциях сводится к задаче: *можно ли произвести униформизацию измеримого B множества E при помощи множества, измеримого B?*

П. С. Новиков показал, что в том случае, когда каждая гиперплоскость $x_1 = x_1^0, \ldots, x_m = x_m^0$ пересекает множество E не более, чем в счетном множестве точек, задача решается положительно, т. е. в E содержится однозначное измеримое B множество E, проекция которого в $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$ совпадает с $\mathfrak{E}$. Отсюда следует, что в этом случае область существования неявных функций $\mathfrak{E}$ есть множество, измеримое B, и что система (1) может быть удовлетворена при помощи функций классификации Бэра. Н. Н. Лузин доказал, что *если E есть измеримое B множество, лежащее в пространстве $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y}$ и пересекающееся с каждой прямой, параллельной оси OY не более, чем по счетному множеству точек, то все точки множества E лежат на сумме счетного множества попарно непересекающихся однозначных поверхностей S_n измеримых B, причем, каковы бы ни были две из них S_i и S_j, одна из них расположена под другой.*

В том случае, когда точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ пространства $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$ может соответствовать несчетное множество значений какого-либо y_i, П. С. Новиков показал, что *реше-*

ния (2) *системы* (1), *у которого все функции f_i принадлежат к классификации Бэра, может не существовать.* Именно, он построил такую функцию $F(x, y)$, непрерывную в пространстве $\mathcal{J}_{xy}$, что уравнению

$$F(x, y) = 0$$

не удовлетворяет никакая функция $y = f(x)$, принадлежащая к классификации Бэра, хотя областью существования неявной функции является все пространство $\mathcal{J}_x$.

Проблема неявных функций, как мы уже указывали, тесно связана с проблемой об униформизации множеств. Легко видеть, что в случае, когда проекция плоского множества E, измеримого B, на ось OX есть A-множество, неизмеримое B, то множество E нельзя униформизировать при помощи множества, измеримого B, потому что, как показал Лузин, проекция однозначного множества, измеримого B, есть множество, измеримое B. Из результата П. С. Новикова о неявных функциях следует, что существует плоское множество E, измеримое B, проекция которого в $\mathcal{J}_x$ совпадает с $\mathcal{J}_x$ и которое все же нельзя униформизировать при помощи множества, измеримого B. Несколько позже Н. Н. Лузин и независимо от него польский математик В. Серпинский показали, что всякое множество, измеримое B, можно униформизировать при помощи CA-множества. Проблема об униформизации множеств оказалась очень важной для изучения множеств более сложной структуры, именно проективных множеств.

Проективные множества, которым посвящена пятая и последняя глава книги, были открыты Н. Н. Лузиным в связи с исследованием трудностей, связанных с проблемой о мощности CA-множеств. *Проективным называется множество, которое может быть получено, отправляясь от некоторого множества E, измеримого B, лежащего в пространстве $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_n}$ с помощью последовательного применения конечного числа раз двух операций: проектирования в пространство $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_p}$ множества, лежащего в пространстве $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_p \ldots x_q}$ $(p < q \leqslant n)$ и взятия дополнения к множеству, лежащему в пространстве $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_p}$ относительно этого пространства.* Н. Н. Лузин высказал утверждение, что для проективных множеств невозможно ни доказать, ни опровергнуть, исходя из принципов теории множеств, утверждения, что они все измеримы, обладают свойством Бэра и имеют мощность континуума. Утверждение Лузина о неразрешимости в теории множеств указанных проблем полностью не доказано до настоящего времени. В 1950 г. П. С. Новиков построил проективное множество, относительно которого *непротиворечиво* предположение, что оно неизмеримо, и *CA*-множество, относительно которого *непротиворечиво* предположение, что оно не содержит совершенного подмножества. Отсюда следует, что ***невозможно доказать измеримость всех проективных множеств и существование у них совершенного подмножества.*** Однако еще не опровергнута возможность доказать теоретико-множественными средствами существование неизмеримого проективного множества и множества, не содержащего совершенного подмножества.

В пятой главе книги Н. Н. Лузин ставит целый ряд проблем о проективных множествах, в частности проблему отделимости и проблему униформизации. Некоторые из этих проблем были впоследствии решены (см. гл. V и примечания к ней), некоторые остались нерешенными до настоящего времени, причем многие из них, повидимому, также связаны с принципиальными трудностями. Для проективных множеств второго класса [1]) проблема отделимости решена П. С. Новиковым.

Н. Н. Лузин применил проективные множества к построению резольвент для некоторых трудных проблем теории множеств. Он говорит, что ***проблема (P) поставлена в резольвенту, если построено множество E такое, что указание в нем точки влечет за собой решение проблемы (P) в положительном смысле, а доказательство пустоты множества E влечет за собой решение проблемы (P) в отрицательном смысле.*** Н. Н. Лузин строит резольвенты для некоторых проблем теории множеств. Эти резольвенты являются проективными множествами, которые построены,

---

[1]) *A*- и *CA*-множества являются проективными множествами первого класса. Проективными множествами второго класса являются проекции *CA*-множеств и дополнения к этим проекциям.

отправляясь от вполне определенных множеств, измеримых B. В частности, Н. Н. Лузин строит резольвенту E для проблемы о мощности CA-множеств. Из результата П. С. Новикова о непротиворечивости предположения, что существует CA-множество, не содержащее совершенного подмножества, следует, что *невозможно доказать пустоту резольвенты* E. Вопрос же о возможности указать точку в E остается нерешенным.

В конце пятой главы Н. Н. Лузин проводит подробный анализ мемуара Лебега «Sur les fonctions représentables analytiquement». Основной вопрос, который его интересует, — это вопрос о дескриптивной структуре универсальной поверхности Лебега, которую тот построил для доказательства существования функции, не входящей в классификацию Бэра. Н. Н. Лузин излагает здесь построение этой поверхности, освободив его от целого ряда сложных деталей и придав ему очень ясную геометрическую форму, которой не было у Лебега. Основываясь на том, что построение поверхности Лебега носит особый характер использования совокупности всех трансфинитных чисел второго класса, так как здесь применяется трансфинитная индукция, идущая по всем трансфинитным числам второго класса, Н. Н. Лузин предполагал, что поверхность Лебега может оказаться множеством, выходящим за пределы проективных множеств. Лузин считал очень важным выяснение дескриптивной структуры поверхности Лебега, так как предполагал, что здесь можно получить новые классы множеств, выходящие за пределы проективных множеств. Однако впоследствии Нейман и Куратовский показали, что поверхность Лебега представляет собой проективное множество второго класса.

Настоящая книга содержит изложение основных результатов дескриптивной теории множеств, полученных до 1929 г. В последней главе поставлен целый ряд новых актуальных проблем теории множеств, направленных на изучение структуры арифметического континуума. Благодаря этому эта книга в значительной степени определила дальнейшее развитие не только дескриптивной теории множеств, но и раздела математической логики, направленного на изучение трудностей, связанных с некоторыми основными проблемами теории множеств.

* * *

Перевод этой книги выполнен Н. К. Бари. Он был сделан еще при жизни Н. Н. Лузина. Однако Лузин не успел произвести окончательное редактирование книги, и это пришлось сделать после его смерти.

В русском переводе книги, согласно указаниям Н. Н. Лузина, сделаны некоторые сокращения по сравнению с французским текстом.

В главе III перед доказательством теоремы о сравнении решет нам пришлось вставить новый параграф о пространственном множестве подобия для исправления неточности, вкравшейся в доказательство теоремы о сравнении решет. Отдельные мелкие неточности исправлены непосредственно в тексте. Кроме того, в русское издание не включено добавление В. Серпинского, имеющееся во французском издании. Вместо этого в русское издание включены в качестве добавлений две статьи Н. Н. Лузина, содержание которых естественно дополняет содержание книги.

Н. Н. ЛУЗИН

ЛЕКЦИИ ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О МНОЖЕСТВАХ, ИЗМЕРИМЫХ B

Протяженность. Рассмотрим линейную протяженность E. В этой протяженности E мы прежде всего различаем *рациональные точки*; это те точки, расстояние которых от начала координат O есть рациональное число.

Но в протяженности E есть много других точек. Непосредственный пример такой точки дается нам диагональю квадрата со стороной 1: это точка, которую мы получаем *непосредственным построением*, не употребляя никакого арифметического приближения.

Но протяженность E содержит еще другие точки, кроме рациональных и *конструктивных* точек. Классическим примером служит неперова база e; все эти точки даются нам при помощи *арифметических приближений*[1]).

Итак, протяженность E далеко не исчерпана одними рациональными точками, и было бы желательно иметь *однородный* процесс, который позволил бы определить *каждую* иррациональную точку: в этом конкретный смысл теории Дедекинда.

Цель теории множеств. Повидимому, при современном состоянии науки является преждевременным нападать на дедекиндовскую теорию иррациональных чисел, если только

---

[1]) Первая трудность, которая нам представляется, относится к существованию конструктивных точек, не имеющих никакого арифметического приближения, а также существованию арифметических точек, не допускающих никакой конструкции. Не входя в тяжелые дискуссии, я ограничился указанием на то, что существуют точки, для которых сначала дается конструкция, и существуют точки, для которых сначала дается приближение.

желать, чтобы это нападение оказалось плодотворным, а именно дало новые положительные результаты, ускользающие от нас в области этой теории.

Таким образом, мы ограничимся тем, что примем ее и будем рассматривать как промежуточный инструмент, считая возможным в дальнейшем указывать на некоторые трудности этой теории.

Но если мы примем однородное определение иррационального числа из теории Дедекинда, где иррациональное число рассматривается как сечение, произведенное в области рациональных чисел, *независимо от его происхождения*, мы получаем возможность (хотя, быть может, лишь иллюзорную) рассматривать континуум как *множество*, образованное из рациональных и иррациональных точек. Таков был взгляд на континуум, принятый a priori Г. Кантором.

Целью теории множеств является вопрос чрезвычайной важности: можно или нет рассматривать линейную протяженность атомистическим образом как множество точек; вопрос этот, кстати, уже не нов и восходит к эллинам.

Область. Порции. Начальный класс

Основная область. Для того чтобы в дальнейшем иметь формулировки *логических* законов в наиболее простой форме, мы исключили из наших рассмотрений все *рациональные* точки.

Черт. 1.

Следовательно, мы примем за базу рассуждений и в качестве основных элементов иррациональные числа x

$$-\infty < x < +\infty,$$

рассматриваемые a priori; мы примем для этих элементов геометрическое изображение при помощи точек M прямой $X'X$.

Множество всех иррациональных точек будет называться *основной областью* и обозначаться через $\mathcal{J}$ или $\mathcal{J}_x$, $\mathcal{J}_y$,

$\mathcal{J}_t$ и т. д., если рассматривать множество иррациональных точек, принадлежащих, соответственно, осям OX, OY, OT и и т. д.[1]) [1].

В дальнейших теориях мы будем изучать множества иррациональных точек, и относительно этих множеств мы примем те же классические обозначения, которые принимаются для произвольных точечных множеств.

Когда даны множества из иррациональных точек E_1, E_2, E_3, ... в конечном или счетном числе, мы будем обозначать через $E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$, $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \ldots$ соответственно множество, образованное соединением E_1, E_2, E_3, ..., и множество, составленное из общих точек для E_1, E_2, E_3, ... Формулы

$$E_1 = E_2, \quad E_1 \subset E_2, \quad E \equiv 0$$

выражают соответственно, что E_1 тождественно с E_2, что E_1 есть часть E_2, что E не содержит ни одной точки.

Точно так же обозначают через $E_2 - E_1$ множество точек, содержащихся в E_2 и не содержащихся в E_1, причем вовсе не предполагается, что E_1 есть часть E_2.

Наконец, мы обозначим через CE *дополнение* к E, т. е. множество иррациональных точек, не входящих в E. Мы имеем очевидное тождество

$$E_2 - E_1 = E_2 \cdot CE_1.$$

---

1) Одна из основных идей, которой мы обязаны Рснэ Бэру, это вполне ясное указание на тот факт, что все *логические* формулировки становятся очень простыми, если рассматривать одни только *иррациональные* числа. Это он первый ввел основную область $\mathcal{J}$, названную им *пространством нулевого измерения* [Baire, Sur la représentation des fonctions discontinues. Acta Mathem. т. 32, 1909, стр. 134.

Причина этой простоты станет ясной, если мы заметим, что в теории Дедекинда рациональные числа даются нам *непосредственно*, тогда как происхождение иррационального числа в некотором смысле *вторичное*.

Поэтому естественно, что получаются сложные логические законы, если рассматривать континуум как составленный из разнородных элементов: рациональных точек и иррациональных точек [2].

Порции. Мы назовем *порцией основной области* $\mathcal{J}$ всякое множество иррациональных точек, *либо* содержащихся в интервале (a, b) с рациональными концами a и b, либо соответственно превосходящих или меньших некоторого рационального числа c.

В первом случае соответствующая порция области $\mathcal{J}$ будет обозначена через (a, b), во втором и третьем случае мы употребляем, соответственно, обозначения $(c, +\infty)$ и $(-\infty, c)$.

Точно так же мы будем рассматривать как порцию и самую основную область $\mathcal{J}$ и обозначим ее в этом случае через $(-\infty, +\infty)$.

Вообще мы назовем *порцией* любого *множества* E, образованного из иррациональных точек, множество тех точек из E, которые содержатся в некоторой порции основной области $\mathcal{J}$.

Начальный класс. По определению, всякое множество E из иррациональных точек *входит в начальный класс* или *в класс* K_0, если оно является суммой конечного или бесконечного множества порций основной области $\mathcal{J}$, *так же как и его дополнение* CE.

Преобразуем это определение.

Пусть x есть любая иррациональная точка прямой $X'X$. Только что формулированное определение говорит нам, что x содержится в некоторой порции (a, b) основной области $\mathcal{J}$, полностью принадлежащей либо к E, либо к CE.

Но если мы удалим из прямой $X'X$ все интервалы (a, b) с рациональными концами, не содержащие *одновременно* точек обоих множеств E и CE, мы получим на прямой $X'X$ замкнутое множество F, образованное из рациональных точек, и, следовательно, счетное. Ясно, что всякая порция основной области $\mathcal{J}$, определяемая некоторым интервалом (a, b), смежным к F, содержится полностью либо в E, либо в CE, и что ни один из смежных к F интервалов нельзя расширить без того, чтобы он не потерял этого свойства.

Окончательно, *всякое множество E начального класса K_0 и его дополнение CE можно рассматривать как образованные из порций основной области $\mathcal{J}$, смежных к некоторому замкнутому множеству F, составленному из рациональных точек, причем две соседние смежные порции принадлежат двум различным множествам.*

Операции над множествами

Мы рассмотрим *пять* элементарных операций, при помощи которых можно строить множества, отправляясь от уже определенных множеств.

Эти пять операций состоят в том, чтобы: совершать *переход к пределу* lim над множествами E_1, E_2, ...; брать *сумму* $+$ *и общую часть* $\cdot$; брать *верхний предел* $\overline{\lim}$ и *нижний предел* $\underline{\lim}$ множеств E_1, E_2, ...

Указанные пять операций, строго говоря, не являются независимыми друг от друга, но одновременное их употребление представляет большие преимущества.

Основная операция. Основной операцией, которая послужит нам в этом исследовании, является операция перехода к пределу.

Назовем *сходящейся последовательностью* всякую бесконечную последовательность множеств из иррациональных точек

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$$

такую, что каждая иррациональная точка x прямой $X'X$ или принадлежит, или не принадлежит всем E, кроме ограниченного числа этих множеств, зависящего от x.

Дадим теперь основное определение: *Множество E называется пределом сходящейся последовательности E_1, E_2, ..., E_n, ..., если E есть множество всех иррациональных точек x* прямой $X'X$, *которые принадлежат всем E_n, начиная с некоторого номера n, зависящего от x.*

В этом случае мы скажем, что множество E получено из сходящейся последовательности E_1, E_2, ..., E_n, ... *при помощи операции перехода к пределу*, и это предельное множество E мы будем обозначать через

$$\lim_{n \to \infty} E_n$$

или просто через

$$\lim E_n.$$

Из этого определения следует, что последовательность множеств E_1, E_2, ..., E_n, ... не перестает сходиться и иметь то же самое предельное множество E, если мы отбросим *ограниченное число* ее членов.

Точно так же ясно, что если данная последовательность множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ сходится и имеет пределом множество E, то последовательность дополнений $CE_1, CE_2, \ldots$ $\ldots, CE_n, \ldots$ тоже сходится и имеет пределом CE.

Наконец, заметим, что множество E можно рассматривать как предел множества E_n, *изменяющегося вместе с* n. Это позволяет нам применять к переходам к пределу над множествами классический принцип анализа: *сумма фиксированного числа k переменных множеств, имеющих пределы, также имеет предел, равный сумме пределов составляющих множеств*:

$$\lim (E_n' + E_n^2 + \ldots + E_n^k) = \lim E_n' + \lim E_n^2 + \ldots + \lim E_n^k.$$

Точно так же *общая часть фиксированного числа переменных множеств, имеющих пределы, имеет предел, равный общей части пределов составляющих множеств*:

$$\lim (E_n' \cdot E_n^2 \ldots E_n^k) = \lim E_n' \cdot \lim E_n^2 \ldots \lim E_n^k.$$

В заключение мы укажем одно свойство перехода к пределу, которым придется пользоваться:

Если переменное множество E_n содержится в предельном множестве E, $E_n \subset E$, то это предельное множество E тождественно с соединением всех E_n, $E = E_1 + E_2 +$ $+ \ldots + E_n + \ldots$ Обратно, если переменное множество E_n содержит предельное множество E, $E_n \supset E$, то это предельное множество E тождественно с общей частью всех E_n, $E = E_1 \cdot E_2 \ldots$

Монотонные последовательности множеств. Последовательность множеств $E_1, E_2, \ldots$ называется *возрастающей, если каждый из ее членов содержится в следующем*: $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ Возрастающая последовательность всегда сходится и имеет пределом E сумму всех E_n, $E = E_1 + E_2 + \ldots$

Последовательность множеств $E_1, E_2, \ldots$ называется *убывающей*, если каждый из ее членов содержит следующий: $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ Убывающая последовательность множеств также сходится и имеет пределом E общую часть всех E_n, $E = E_1 \cdot E_2 \ldots$

Убывающие и возрастающие последовательности множеств называются *монотонными*.

В. Юнг первый употребил монотонные последовательности множеств, как инструмент для построения множеств все более и более сложных.

Другие операции. Рассмотрим бесконечную последовательность множеств

$$E_1, E_2, \ldots,$$

образованных из иррациональных точек основной области $\mathcal{J}_x$.

Мы будем производить над этими множествами следующие четыре операции:

I. Сумма. Эта операция ставит в соответствие всякой бесконечной последовательности множеств $E_1, E_2, \ldots$ их соединение $E_1 + E_2 + \ldots$, т. е. множество, образованное из точек, принадлежащих по крайней мере одному из множеств E_n. Так полученное множество $E_1 + E_2 + \ldots$ называется *суммой* данных множеств.

Чтобы выразить тот факт, что множества $E_1, E_2, \ldots$ не имеют попарно общих точек, мы скажем, что множество $S = E_1 + E_2 + \ldots$ есть *сумма в узком смысле* и что S получено из $E_1, E_2, \ldots$ при помощи *сложения в узком смысле*.

Если множества E_i могут иметь общие точки, множество S будет называться *суммой в широком смысле*; в этом случае мы скажем, что S получено из $E_1, E_2, \ldots$ при помощи *сложения в широком смысле*.

Ясно, что множество-сумма $E = E_1 + E_2 + \ldots$ не зависит от порядка слагаемых множеств E_i.

Сложение счетного числа множеств сводится опять к переходу к пределу.

В самом деле, когда дана бесконечная последовательность $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, мы можем получить из нее другую последовательность множеств $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, полагая

$$S_1 = E_1, \ S_2 = E_1 + E_2, \ \ldots, \ S_n = E_1 + E_2 + \ldots + E_n, \ \ldots$$

Так как последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ есть возрастающая, то она сходится к некоторому предельному множеству S, и мы, очевидно, имеем

$$S = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$$

II. Общая часть. Эта операция дает множество, образованное из общих точек всех множеств данной бесконечной последовательности $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ Так полученное множество E называется *общей частью данных множеств* $E_1, E_2, \ldots$; мы обозначим эту операцию символом

$$E = E_1 \cdot E_2 \ldots \quad \text{или} \quad E_1 E_2 \ldots$$

Общая часть E также не зависит от порядка составляющих множеств E_n.

Общая часть счетного числа множеств также сводится к переходу к пределу.

В самом деле, если мы положим

$$P_1 = E_1, \quad P_2 = E_1 \cdot E_2, \ldots \quad P_n = E_1 E_2 \ldots E_n, \ldots,$$

то последовательность множеств $P_1 \supset P_2 \supset, \ldots, \supset P_n \supset \ldots$ есть, очевидно, убывающая, а потому она сходится к некоторому определенному предельному множеству P. Ясно, что

$$P = E_1 \cdot E_2 \ldots E_n \ldots$$

III. Верхний предел последовательности множеств. Пусть дана бесконечная последовательность множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ Мы называем *верхним пределом* последовательности множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ множество E, образованное из точек, каждая из которых принадлежит бесконечному множеству из множеств E_n.

Мы будем обозначать верхний предел последовательности множеств через

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} E_n \quad \text{или} \quad \overline{\lim} E_n.$$

Из определения вытекает, что всякая последовательность множеств $E_1, E_2, \ldots$ имеет верхний предел и что можно пренебрегать порядком членов последовательности и ограниченным числом их без того, чтобы изменить верхний предел.

Операция III, состоящая в том, чтобы взять верхний предел, сводится к операциям сложения и взятия общей части по формуле:

$$\overline{\lim} E_n = (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots)(E_2 + E_3 + \ldots)(E_3 + \ldots) \ldots$$

Отсюда мы немедленно заключаем, что *операция* $\overline{\lim} E_n$ *сводится к выполнению двух последовательных простых* *переходов к пределу* с двумя различными индексами, так как если E_{nm} обозначает общую часть конечных сумм

$$E_{nm} = (E_1 + E_2 + \ldots + E_m)(E_2 + \ldots + E_m) \ldots \\ \ldots (E_n + \ldots + E_m),$$

то мы, очевидно, имеем

$$\overline{\lim} E_n = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} E_{nm}.$$

Тем не менее интересно заметить, что *операция* $\overline{\lim}$ *вовсе не эквивалентна совокупности двух последовательных простых переходов к пределу с различными индексами* $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty}$. Мы увидим, что среди множеств, получающихся *двойным* применением простого перехода к пределу, большинство не может быть получено при помощи операции $\overline{\lim}$, произведенной только один раз.

С другой стороны, операция $\overline{\lim} E_n$ охватывает, как частный случай, основную операцию lim, так как если данная последовательность множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ сходится, то верхний предел $\overline{\lim} E_n$, очевидно, совпадает с пределом $\lim E_n$ этой последовательности.

В дальнейшем мы уточним границы применимости операции $\overline{\lim} E_n$ (стр. 77 этой книги).

IV. Нижний предел. Пусть дана бесконечная последовательность множеств $E_1, E_2, \ldots$; мы назовем *нижним пределом* для $E_1, E_2, \ldots$ множество E, образованное из иррациональных точек x, для каждой из которых можно определить такое n, что эта точка принадлежит $E_n, E_{n+1}, E_{n+2}, \ldots$

Нижний предел E мы будем обозначать через $\varliminf\limits_{n\to\infty} E_n$ или $\underline{\lim} E_n$.

Ясно, что нижний предел E тоже не зависит ни от порядка членов последовательности $E_1, E_2, \ldots$, ни от конечного числа этих членов.

Операция IV, $\underline{\lim} E_n$, также сводится к операциям сложения и взятия общей части по формуле

$$\underline{\lim} E_n = (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \ldots) + (E_2 \cdot E_3 \ldots) + (E_3 \ldots) + \ldots$$

и, следовательно, сводится к двум простым переходам к пределу $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty}$. Но эта операция опять-таки не эквивалентна последовательному двукратному переходу к пределу. Мы увидим в дальнейшем, какова область применимости этой операции (стр. 77 этой книги).

Сравнение введенных операций. Чтобы сравнить операции над множествами E_1, E_2, ..., мы заметим, что общая часть этих множеств есть часть нижнего предела $\underline{\lim}\, E_n$, который содержится в верхнем пределе $\overline{\lim}\, E_n$. С другой стороны, верхний предел есть часть суммы множеств $E_1+E_2+\ldots$ и, таким образом, мы имеем одновременно выполненные неравенства

$$P \subset \underline{\lim}\, E_n \subset \overline{\lim}\, E_n \subset S.$$

Важно заметить, что в общем случае нижний предел $\underline{\lim}\, E_n$, составляя часть верхнего предела $\overline{\lim}\, E_n$, *вовсе с ним не совпадает*. Множества $\underline{\lim}\, E_n$ и $\overline{\lim}\, E_n$ совпадают в том и только в том случае, когда последовательность множеств E_1, E_2, ... *сходится*: в этом случае оба предельных множества совпадают с *единственным пределом* $\lim E_n$ этой последовательности.

Наконец, можно заметить, что верхний предел $\overline{\lim}\, E_n$ множеств E_1, E_2, ... есть дополнение к нижнему пределу дополнений CE_1, CE_2, ...; то же справедливо, если переставить слова верхний и нижний:

$$C\,\overline{\lim}\, E_n = \underline{\lim}\, CE_n; \quad C\,\underline{\lim}\, E_n = \overline{\lim}\, CE_n.$$

Характеристические функции. Мы теперь определим характеристическую функцию множества, введенную Валле-Пуссеном [1]). Введение этого понятия очень полезно для обычной интерпретации предельных операций над множествами.

Назовем *характеристической функцией множества* E функцию $f(x)$, определенную в основной области $\mathcal{J}$, равную 1 для точек E и равную 0 всюду вне E.

Обратно, всякая функция $f(x)$, определенная на $\mathcal{J}$ и принимающая лишь значения 0 и 1, есть характеристи-

---

[1]) Ch. de la Vallée-Poussin, Sur l'intégrale de Lebesgue (Trans. Amer. Math. Soc., 1915).

ческая функция для множества E точек x, для которых $f(x)=1$.

Рассмотрим бесконечную последовательность множеств

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$$

и их характеристические функции

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

Из определения сходимости последовательности *множеств* вытекает, что для того, чтобы последовательность характеристических функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ была сходящейся *в классическом смысле математического анализа*, необходимо и достаточно, чтобы последовательность соответствующих множеств $E_1, E_2, \ldots$ была сходящейся *в ранее определенном смысле.* В этом случае предельная функция $\varphi = \lim \varphi_n$ *есть характеристическая функция для предельного множества* $E = \lim E_n$.

Если последовательность множеств $E_1, E_2, \ldots$ не есть сходящаяся, то последовательность соответствующих характеристических функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ расходится фактически в каждой точке x множества-разности

$$\overline{\lim} E_n - \underline{\lim} E_n$$

и только в этих точках.

В этом случае, если принять обычные обозначения $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \varphi_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \varphi_n$ для *верхнего предела* и *нижнего предела* последовательности функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, то ясно, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \varphi_n$ есть характеристическая функция для верхнего предела $\overline{\lim} E_n$ последовательности множеств $E_1, E_2, \ldots$ и, соответственно, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \varphi_n$ есть характеристическая функция для нижнего предела $\underline{\lim} E_n$.

Можно заметить, что характеристическая функция в отношении других операций обладает следующими свойствами [1]):

Если φ есть характеристическая функция множества E, то $1-\varphi$ есть характеристическая функция дополнения CE

[1]) Ch. de la Vallée-Poussin, Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire, стр. 7.

к множеству E; если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ суть характеристические функции для $E_1, E_2, \ldots$, то их бесконечное произведение $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \ldots$ есть характеристическая функция для общей части $E_1 \cdot E_2 \ldots$

Так как дополнение к бесконечной сумме $E_1 + E_2 + \ldots$ есть общая часть дополнений: $CE_1 \cdot CE_2 \ldots$, то мы заключаем, что характеристическая функция для бесконечной суммы $E_1 + E_2 + \ldots$ может быть представлена в форме сходящегося аналитического выражения $1 - (1 - \varphi_1)(1 - \varphi_2) \ldots$; если множества $E_1, E_2, \ldots$ попарно без общих точек, то характеристическая функция для их суммы $E_1 + E_2 + \ldots$ сводится к сходящемуся ряду $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots$

Наконец, множество-разность $E_2 - E_1$ имеет характеристическую функцию $\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2$, так как это множество может быть представлено в виде $E_2 \cdot CE_1$.

Алгебраическое обозначение

Полиномы, образованные из множеств. Это понятие часто бывает удобно для доказательств. Его введение основывается на следующем замечании.

Знаки алгебраической логики естественно вводятся в операции над множествами, так как они обладают свойствами, аналогичными арифметическим операциям.

Мы уже видели, что для того, чтобы выразить, что множество E_1 содержится во множестве E_2, уславливаются писать

$$E_1 \subset E_2 \quad \text{или} \quad E_2 \supset E_1.$$

Сложение $E_1 + E_2 + \ldots$ и *вычитание* $E_2 - E_1$ множеств соответственно аналогичны сложению и вычитанию *конечных величин. Общая часть* $E_1 \cdot E_2 \ldots$ аналогична *произведению чисел*; по этой причине часто называют умножением операцию, состоящую в том, чтобы взять общую часть заданных множеств $E_1, E_2, \ldots$ Образование *дополнения* CE некоторого множества E есть частный случай вычитания.

Умножение и вычитание сводятся к сложению при помощи дополнений; это замечание часто бывает ценным при доказательствах. В самом деле, имеем

$$C(E_1 \cdot E_2) = CE_1 + CE_2; \quad C(E_2 - E_1) = CE_2 + E_1.$$

Сложение и умножение коммутативны, ассоциативны, дистрибутивны, как соответствующие операции арифметики. Например, мы имеем

$$E_1 \cdot E_2 = E_2 \cdot E_1, \quad (E_1 \cdot E_2) \cdot E_3 = E_1 \cdot (E_2 \cdot E_3),$$
$$E_1 \cdot (E_2 + E_3) = E_1 \cdot E_2 + E_1 \cdot E_3.$$

Все правила алгебраических вычислений над полиномами с положительными членами могут, следовательно, применяться к полиномам, образованным из множеств.

Установив это, рассмотрим любой полином

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, все члены которого имеют коэффициенты, равные 1. Если заменить буквы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно *любыми* точечными множествами $E_1, E_2, \ldots, E_n$ и рассматривать знаки операций $+$ и $\cdot$ как сумму и общую часть в области множеств, то *полином P становится вполне определенным множеством точек*, которое мы обозначим через

$$P(E_1, E_2, \ldots, E_n).$$

Смысл $P(E_1, \ldots, E_n)$ нисколько не зависит от порядка членов полинома P.

Указанные правила уже неприменимы, если имеются отрицательные члены, так как вычитание множеств не обладает ни ассоциативностью, ни коммутативностью. Лишь дистрибутивный закон сохраняется:

$$E_1 \cdot (E_2 - E_3) = E_1 \cdot E_2 - E_1 \cdot E_3.$$

Тем не менее, если полином

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

имеет коэффициенты, равные $+1$ или -1, и если первый член полинома P положителен, то *можно сохранить интерпретацию для*

$$P(E_1, E_2, \ldots, E_n)$$

в области множеств, если условиться полагать

$$U - V - W = (U - V) - W,$$

где буквы U, V, W — любые множества точек. Но в этом случае *смысл выражения $P(E_1, E_2, \ldots, E_n)$, разумеется, зависит от порядка членов полинома $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Ряды множеств. Для дальнейшего мы введем понятие *ряда множеств* [1]).

Назовем *рядом* множеств бесконечный символ

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

где буквы u_n обозначают множество точек, которому предшествует знак $+$ или $-$.

Множество точек, которое получается, если отбросить знак члена u_n, будет называться *абсолютной величиной* u_n; это множество мы обозначим через

$$|u_n|.$$

Мы скажем, что некоторый *ряд* множеств

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходится, если сходится последовательность множеств

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots,$$

где S_n есть сумма n первых членов ряда. В этом случае предельное множество S для этой последовательности будет называться *суммой* ряда $u_1 + u_2 + \ldots$, и мы будем писать равенство

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

В дальнейшем мы рассматриваем только сходящиеся ряды; у этих рядов первый член u_1 есть множество точек, предшествуемое знаком $+$, так как в противном случае сумма S_n первых n членов предложенного ряда не имела бы никакого смысла.

Знакочередующиеся ряды множеств. Займемся *убывающими знакочередующимися* рядами множеств: это ряды вида

$$E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \ldots + (-1)^{n+1} E_n + \ldots,$$

---

[1]) Мы вводим понятие ряда множеств, чтобы облегчить формальный ход рассуждений.

где множества E_1, E_2, ... образуют убывающую последовательность

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$$

Для этих рядов множеств мы имеем предложение, вполне аналогичное предложению классического анализа о числовых знакочередующихся рядах:

Теорема. *Для того чтобы убывающий знакочередующийся ряд множеств $E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \ldots$ был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы общий член этого ряда стремился к нулю, когда n неограниченно возрастает, т. е. чтобы мы имели*

$$\lim_{n \to \infty} E_n = 0.$$

Условие необходимо. В самом деле, так как последовательность множеств E_1, E_2, ... есть убывающая, множество E_n стремится к вполне определенному пределу E, когда n неограниченно возрастает, $E = \lim E_n$. Кроме того, известно, что этот предел E должен совпадать с общей частью множеств E_1, E_2, ..., и, таким образом, мы имеем

$$E = E_1 \cdot E_2 \ldots E_n \ldots$$

Если переменное множество E_n не стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает, то предельное множество E эффективно содержит точки. Но если некоторая точка принадлежит к E, то она принадлежит ко всем членам ряда — множествам E_n. Отсюда следует, что точка x принадлежит ко всем множествам S_n для нечетного n и не принадлежит ни одному из множеств S_n с четным n, где S_n есть сумма n первых членов предложенного знакочередующегося ряда $E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \ldots$ Отсюда мы заключаем, что последовательность S_1, S_2, ..., S_n, ... расходится, а, значит, и знакочередующийся ряд также.

Условие достаточно. В самом деле, какова бы ни была иррациональная точка x основной области $\mathcal{J}$, принадлежащая множеству E_1, можно найти целое положительное n такое, что x принадлежит к E_n, но не принадлежит к E_{n+1}. Отсюда мы заключаем, что если n нечетно, то x принадлежит всем множествам S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, ... и что x не принадлежит ни одному из множеств S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, ..., если n четное. Если же x не принадлежит E_1, то она не принадлежит ни одному из множеств S_1, S_2, ... Значит, последовательность множеств S_1, S_2, ..., S_n, ... сходится, а это и доказывает сходимость предложенного знакочередующегося ряда. Ч. т. д.

Важно заметить, что *сумма S знакочередующегося сходящегося ряда множеств*

$$E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots$$

может быть представлена в следующих двух видах:

$$S = (E_1 - E_2) + (E_3 - E_4) + (E_5 - E_6) + \dots$$

и

$$S = E_1 - (E_2 - E_3) - (E_4 - E_5) - \dots,$$

где все множества-разности, написанные в скобках, не имеют попарно общих точек.

Из первой формулы следует, что множество S есть предел *возрастающей* последовательности множеств, но вторая формула показывает, что S есть в то же время и предел *убывающей* последовательности множеств.

Понятие множества, измеримого B

Одним из понятий наибольшей важности в математическом анализе является концепция множества, измеримого B [1]). Это *множества, которые получаются из порций основной области $\mathcal{J}$ с помощью следующих двух элементарных операций, повторяемых бесконечное множество раз:*

1° *Взятие разности двух множеств E_1 и E_2 уже определенных и таких, что каждая точка E_1 принадлежит к E_2*

$$E_2 - E_1. \qquad (D)$$

2° *Взятие суммы бесконечного числа множеств E_1, E_2, ..., E_n, ... уже определенных и попарно без общих точек:*

$$E_1 + E_2 + \dots + E_n + \dots \qquad (S)$$

---

[1]) Эти множества рассмотрены впервые Э. Борелем в его книге «Leçons sur la théorie des fonctions», 1898, гл. III.

Это определение множества, измеримого B, тесно связано с самим возникновением этих множеств [1]). Можно дать определению следующую форму:

Мы скажем, что множество точек E измеримо B, если мы умеем получить счетную вполне упорядоченную последовательность множеств, имеющую множество E своим последним членом, и каждый член которой, не являющийся порцией области $\mathcal{J}$, есть результат операции вычитания (D) или операции сложения (S) в узком смысле, произведенной над предыдущими членами

$$E_0,\ E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_\beta,\ \ldots \mid E.$$

Это определение, к которому мы естественно пришли, без сомнения, покажется более ясным, если мы отметим, что множества E_β, предшествующие E и не являющиеся порциями области $\mathcal{J}$, оказываются предварительными множествами, которые нужно приготовить заранее, чтобы получить результирующее множество E.

Если мы будем стараться сделать это определение более «экономным», т. е. избегающим тех предварительных множеств, которые не являются строго необходимыми для определения результирующего множества E, то нужно ввести следующее дополнительное условие: *невозможно удалить из этой вполне упорядоченной последовательности $E_0, E_1, \ldots$ $\ldots, E_\beta, \ldots \mid E$ ни одного члена, кроме E, без того, чтобы эта последовательность утратила свое основное свойство: каждый из ее членов определим при помощи предыдущих членов.*

Это дополнительное условие исключает множества, полностью инородные по отношению к множеству E, т. е. те, знание которых нисколько не необходимо при окончательном образовании множества E.

Но здесь речь не идет о *классе* множества E, измеримого B, т. е. не о таком новом условии: *вполне упорядоченная последовательность $E_0, E_1, \ldots, E_\beta, \ldots \mid E$, предназначенная для определения множества E, должна быть наиболее короткой, т. е. соответствующей наименьшему трансфинитному числу.*

---

[1]) См. о проблеме меры Бореля, стр. 47. (*Прим. ред.*)

Преобразования определения множества, измеримого B

Характер основных операций. Операция (S), состоящая в том, чтобы взять сумму счетного множества уже определенных множеств, имеет *положительный* характер, так как точки, из которых образована сумма $E_1+E_2+\ldots$, даны положительным образом [1]).

Точно так же мы можем рассматривать как положительную операцию (P), состоящую в том, чтобы взять общую часть счетного множества уже определенных множеств.

Напротив, операция (D), состоящая в том, чтобы взять разность двух множеств, при помощи которой строятся множества, измеримые B, есть, безусловно, *отрицательная*, так как мы образуем разность E_2-E_1, беря точки E_2, которые не принадлежат данному множеству E_1 [2]).

Но если указывают некоторое множество точек, то почти всегда указывают все точки, ему принадлежащие, без того, чтобы дать критерий, позволяющий узнать, принадлежит ли произвольно взятая точка этому множеству или нет. В самом деле, мы увидим в дальнейшем примеры, где для того, чтобы узнать, принадлежит ли данная точка рассматриваемому множеству, надо совершить несчетное множество не зависящих друг от друга операций, или же, где даже нет никакого регулярного процесса [3]). То, что мы сказали, достаточно,

---

[1]) Мы, естественно, предполагаем, что точки каждого члена E_n названы при помощи *положительного* свойства.

[2]) Если E_2 есть множество конкретных предметов, то ясно, что, вычитая из E_2 некоторую часть, мы получим остаток вполне реальный. Но если E_2 есть бесконечное множество, то нисколько не очевидно, что, вычитая из E_2 бесконечное множество его элементов, мы получим остаточную часть, имеющую некоторое определение (положительное свойство). Это некоторого рода постулат, который, на мой взгляд, очень мало вероятен.

[3]) Если некоторая функция $f(x)$ рассматривается как заданная, то естественно считать заданным и множество E значений $f(x)$. Но ничто, на мой взгляд, не оправдывает распространение этого взгляда на дополнения к «данным» множествам, если мы не можем преобразовать *отрицательное* определение такого множества в *положительное* определение. В то время как мы получаем *все* элементы E, производя операцию f над *всеми* действительными числами, мы не имеем никакого регулярного процесса, чтобы узнать, при-

чтобы предвидеть большие трудности, связанные с операцией (D).

Как частный случай операции вычитания (D) мы рассматриваем операцию (C) перехода от данного множества E к его дополнению CE, так как для получения дополнения CE достаточно взять множество-разность $\mathcal{J} - E$, где $\mathcal{J}$ есть основная область.

Таким образом, мы естественно приходим к тому, чтобы поставить следующий вопрос: *узнать, можно ли получить всякое множество, измеримое B, при помощи положительных операций и, в частности, при помощи операций: суммы (S) и общей части (P).*

Речь, следовательно, идет о преобразовании определения множества, измеримого B.

Образование множеств, измеримых B, при помощи операций (S) и (P). Мы сначала покажем, что *любое данное измеримое B-множество можно получить, отправляясь от порций основной области $\mathcal{J}$, при помощи двух операций: суммы в узком смысле (S) и общей части (P), неограниченно повторенных.*

Чтобы доказать это предложение, мы заметим следующее: сказать, что некоторое множество E получено из порций области $\mathcal{J}$ при помощи операций (S) и (P), неограниченно повторенных, это значит сказать, что E есть последний член счетной вполне упорядоченной последовательности $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_\gamma, \ldots | E$, каждый член которой, не являющийся порцией области $\mathcal{J}$, получается из предыдущих членов или при помощи операции (S), или же при помощи операции (P).

Установив это, мы можем во вполне упорядоченной последовательности $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_\beta, \ldots | E$, служащей для определения данного множества E, измеримого B, поставить непосредственно перед каждым членом E_β его дополнение CE_β;

надлежит ли данное действительное число y_0 к дополнению к E или нет, и можно сильно сомневаться, чтобы удалось дать общее решение этой проблемы. Если функция $f(x)$ есть проективная, то надо произвести множество операций, мощность которого континуальна, и много шансов за то, что эти попытки будут независимы друг от друга, хотя f и определена при помощи перечислимого множества условий. См. N. Lusin, Remarques sur les ensembles projectifs, Comptes Rendus, стр. 835—837, 1927.

если E_β есть порция области $\mathcal{J}$, то дополнительное множество CE_β, вообще говоря, состоит из двух порций области $\mathcal{J}$ и, в этом случае, мы перед CE_β поставим эти две порции.

Ясно, что этим способом мы получим вполне упорядоченную счетную последовательность $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_\gamma, \ldots | E$, имеющую E своим последним членом.

Я теперь утверждаю, что последовательность $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots$ $\ldots, \mathcal{E}_\gamma, \ldots | E$, полученная таким способом, служит для определения множества E, отправляясь от порций области $\mathcal{J}$, при помощи операций (S) и (P), неограниченно повторенных.

В самом деле, если $\mathcal{E}_\gamma$ не есть порция области $\mathcal{J}$, мы имеем либо $\mathcal{E}_\gamma = E_\beta$, либо $\mathcal{E}_\gamma = CE_\beta$. Следует различать два случая. *В первом случае* мы имеем $E_\beta = E_{\beta_1} + E_{\beta_2} + \ldots$, где $\beta_i < \beta$. Отсюда следует, что $CE_\beta = CE_{\beta_1} \cdot CE_{\beta_2} \ldots$ Из этого мы заключаем, что $\mathcal{E}_\gamma$ определимо при помощи операции (S) или операции (P), примененной к счетному числу множеств $\mathcal{E}_{\gamma'}$, предшествующих $\mathcal{E}_\gamma$, $\gamma' < \gamma$. *Во втором случае* мы имеем $E_\beta = E_{\beta_1} - E_{\beta_2}$, где β_1 и β_2 меньше β. В этом случае мы можем написать $E_\beta = E_{\beta_1} \cdot CE_{\beta_2}$ и $CE_\beta = CE_{\beta_1} + E_{\beta_2}$. Из этого мы заключаем, что $\mathcal{E}_\gamma$ получается применением одной из двух операций (S) и (P) к предшествующим множествам $\mathcal{E}_{\gamma'}$, $\gamma' < \gamma$. Ч. т. д.

Более важным является следующее предложение: ***всякое множество E, получаемое, отправляясь от порций области $\mathcal{J}$, при помощи двух операций: суммы в широком смысле (S) и общей части (P), повторенных неограниченно, измеримо B.***

Чтобы доказать это, возьмем вполне упорядоченную счетную последовательность множеств

$$E_0, E_1, E_2, \ldots, E_\beta, \ldots | E, \tag{1}$$

служащую для определения множества E при помощи операций (S) и (P), отправляясь от порций области $\mathcal{J}$.

Назовем ***нормальным*** всякий член этой последовательности такой, что общая часть этого члена (или его дополнения) и некоторых предшествующих множеств (или их дополнений), взятых в конечном числе, может быть определена, отправляясь от порций области $\mathcal{J}$, при помощи операций:

(S) в узком смысле и операции (C), позволяющей переходить от множества к его дополнению.

Ясно, что нормальные члены существуют: таковым является каждый член E_n последовательности (1) с конечным индексом n потому, что в этом случае E_n и все предшествующие члены состоят из конечного числа порций области $\mathcal{J}$.

Я теперь утверждаю, что каждый член последовательности (1) нормален.

Чтобы доказать это предположим, что существуют *анормальные* члены. Пусть E_β — первый из них. Так как каждый член последовательности (1) может быть получен при помощи операций (S) и (P), примененных к предыдущим членам, нужно различать два случая.

В первом случае мы имеем $E_\beta = E_{\beta_1} + E_{\beta_2} + \ldots$, где $\beta_1 < \beta_2 < \ldots$ все меньше β.

Так как E_β — анормальный член, то среди множеств

$$\Pi E_{\beta'} \cdot \Pi C E_{\beta''} \cdot E_\beta \quad \text{и} \quad \Pi E_{\beta'} \cdot \Pi C E_{\beta''} \cdot C E_\beta,$$

где два первых сомножителя обозначают, соответственно, общие части множеств $E_{\beta'}$ и дополнений к множествам $E_{\beta''}$, предшествующим E_β, $\beta' < \beta$ и $\beta'' < \beta$, найдется по крайней мере одно множество, которое нельзя получить, отправляясь от порций области $\mathcal{J}$ при помощи операций (S) в узком смысле и (C).

Но мы можем написать

$$E_\beta = E_{\beta_1} + CE_{\beta_1} \cdot E_{\beta_2} + \ldots + CE_{\beta_1} \cdot CE_{\beta_2} \ldots CE_{\beta_{n-1}} \cdot E_{\beta_n} + \ldots$$

и, следовательно,

$$\Pi E_{\beta'} \cdot \Pi C E_{\beta''} \cdot E_\beta =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Pi E_{\beta'} \cdot \Pi C E_{\beta''} \cdot CE_{\beta_1} \cdot CE_{\beta_2} \ldots CE_{\beta_{n-1}} \cdot E_n.$$

Так как все члены последовательности (1), предшествующие E_β, нормальны, мы заключаем, что множество $\Pi E_{\beta'} \cdot \Pi C E_{\beta''} \cdot E_\beta$ получается из порций области $\mathcal{J}$ при помощи операций (S) в узком смысле и (C).

Остается лишь рассмотреть множество $\Pi E_{\beta'} \cdot \Pi C E_{\beta''} \cdot C E_\beta$. Но мы можем записать это множество в виде

$$C\,[C\,(\Pi E_{\beta'} \cdot \Pi C E_{\beta''}) + E_\beta]$$

и, следовательно, представить его в виде

$$C\left[C(\Pi E_{\beta'}\cdot\Pi CE_{\beta''})+\sum_{n=1}^{\infty}\Pi E_{\beta'}\cdot\Pi CE_{\beta''}\cdot CE_{\beta_1}\ldots CE_{\beta_{n-1}}\cdot E_{\beta_n}\right].$$

Так как все члены последовательности (1), предшествующие E_β, нормальны, то написанное множество может быть задано, отправляясь от порций области $\mathcal{J}$ при помощи операций: (S) в узком смысле и (C).

Во втором случае мы имеем $E_\beta=E_{\beta_1}\cdot E_{\beta_2}\ldots$, что дает нам

$$CE_\beta=CE_{\beta_1}+E_{\beta_1}\cdot CE_{\beta_2}+\ldots+E_{\beta_1}\cdot E_{\beta_2}\ldots E_{\beta_{n-1}}\cdot CE_{\beta_n}+\ldots$$

и, следовательно,

$$\Pi E_{\beta'}\cdot\Pi CE_{\beta''}\cdot CE_\beta=\sum_{n-1}^{\infty}\Pi E_{\beta'}\cdot\Pi CE_{\beta''}\cdot E_{\beta_1}\cdot E_{\beta_2}\ldots E_{\beta_{n-1}}\cdot CE_{\beta_n}$$

и

$$\Pi E_{\beta'}\cdot\Pi CE_{\beta''}\cdot E_\beta=C\left[C(\Pi E_{\beta'}\cdot\Pi CE_{\beta''})+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\Pi E_{\beta'}\cdot\Pi CE_{\beta''}\cdot E_{\beta_1}\cdot E_{\beta_2}\ldots E_{\beta_{n-1}}\cdot CE_{\beta_n}\right].$$

Отсюда легко заключить, как и в предыдущем случае, что множества $\Pi E_{\beta'}\cdot\Pi CE_{\beta''}\cdot CE_\beta$ и $\Pi E_{\beta'}\cdot\Pi CE_{\beta''}\cdot E_\beta$ определимы, отправляясь от порций области $\mathcal{J}$ при помощи операций: (S) в узком смысле и (C).

Таким образом, мы пришли к противоречию, а это показывает, что *каждый член последовательности* (1) *нормален*.

Установив это, возьмем множество E. Если мы имеем $E=E_{\beta_1}+E_{\beta_2}+\ldots$, то можно писать

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}CE_{\beta_1}\cdot CE_{\beta_2}\ldots CE_{\beta_{n-1}}\cdot E_{\beta_n}.$$

Так как член E_β последовательности (1) нормален, то каждый член этого ряда определяется при помощи (S) в узком смысле и (C), отправляясь от порций области $\mathcal{J}$. Значит, это справедливо и для самого множества E и, следовательно, оно измеримо B.

Если мы имеем $E = E_{\beta_1} \cdot E_{\beta_2} \ldots E_{\beta_n} \ldots$, то можно писать

$$CE = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\beta_1} \cdot E_{\beta_2} \ldots E_{\beta_{n-1}} \cdot CE_{\beta_n},$$

а так как член E_β последовательности (1) нормален, то мы вынуждены заключить, что множество CE, а значит, и само множество E определимо при помощи операций (S) в узком смысле и (C), отправляясь от порций области $\mathcal{J}$. Итак, E измеримо B [1]), ч. т. д.

Одним из следствий этого является то, что *всякое множество, измеримое B, может быть получено, отправляясь от порций основной области $\mathcal{J}$, при помощи следующих двух операций, неограниченно повторенных*:

1° *Составление суммы бесконечного числа уже определенных множеств* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ без общих частей

$$E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots; \qquad (S)$$

2° *Взятые дополнения к данному множеству* E

$$CE. \qquad (C)$$

Образование множеств, измеримых B, при помощи переходов к пределу. Мы хотим теперь изучить связь между понятием множества, измеримого B, и другими операциями.

Прежде всего мы имеем следующее важное предложение, которое позволяет получать множества, измеримые B, рассматривая лишь монотонные последовательности множеств:

Множество, которое можно получить, отправляясь от множеств начального класса K_0 при помощи переходов к пределу, применяемых каждый раз к монотонной

[1]) Эта теорема чрезвычайно важна, так как она показывает нам, что в определении множества, измеримого B, можно одни операции заменять другими. Самая важность теоремы, мне кажется, заставляет отметить один пункт в данном доказательстве: мы непосредственно образовали вполне упорядоченную последовательность, которая служит для определения множества, измеримого B при помощи операций (S) и (P); но, когда такая последовательность дана, мы не умеем непосредственно получить вполне упорядоченную последовательность, которая служит для определения рассматриваемого множества при помощи операций (S) и (C). Ход рассуждения в этом случае очень косвенный.

последовательности множеств и неограниченно повторенных, есть множество, измеримое B; обратно, всякое множество, измеримое B, может быть получено этим способом.

Первая часть этого предложения вполне очевидна, так как предел *монотонной* последовательности множеств E_1, $E_2, \ldots$ есть либо сумма этих множеств, либо их общая часть. Следовательно, если множество E может быть получено при помощи пределов монотонных последовательностей, отправляясь от множеств начального класса K_0, то множество E может быть получено и при помощи двух операций (S) и (P), отправляясь от порций области $\mathcal{J}$. Поэтому в силу предыдущей теоремы E *измеримо* B.

Чтобы доказать *вторую часть* предложения, возьмем вполне упорядоченную счетную последовательность

$$E_0,\ E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_\beta,\ \ldots,\ |\,E, \tag{1}$$

служащую для определения заранее данного множества E, измеримого B при помощи операций (S) и (P), неограниченно повторенных, отправляясь от порций области $\mathcal{J}$.

Назовем *нормальным* всякий член E_β последовательности (1) такой, что каждое множество-полином $P(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, E_\beta)$, образованное из конечного числа членов последовательности (1) с индексами, не превосходящими β, может быть получено, отправляясь от множеств начального класса K_0 при помощи переходов к пределу, примененных к *монотонным* последовательностям множеств. Ясно, что существуют нормальные члены, так как таковым является начальный член E_0.

Я теперь утверждаю, что каждый член последовательности (1) нормален. В самом деле, в противном случае существуют анормальные члены; пусть E_β — первый из них. Следует различать два случая.

В первом случае мы имеем

$$E_\beta = E_{\beta_1} + E_{\beta_2} + \ldots + E_{\beta_n} + \ldots,$$

где $\beta_1 < \beta_2 < \ldots$ предшествуют β. Обозначим через S_n сумму n первых членов этого ряда. Бесконечная последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ очевидно, *возрастающая*, и мы имеем

$$E_\beta = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Пусть $P(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, E_\beta)$ — любое множество-полином, образованное из конечного числа множеств последовательности (1) с индексами, не превосходящими β. Мы, очевидно, имеем

$$P(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, E_\beta) = \lim_{n\to\infty} P(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, S_n),$$

причем важно заметить, что множества $P(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, S_n)$ образуют при неограниченно возрастающем n *возрастающую* последовательность множеств, так как S_n растет. Следовательно, операция lim здесь применена к случаю *монотонной* последовательности.

С другой стороны, множество-полином $P(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, S_n)$ может быть записано в форме

$$P(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, E_{\beta_1} + E_{\beta_2} + \ldots + E_{\beta_n}) = \\ = Q(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, E_{\beta_1}, \ldots, E_{\beta_n}).$$

Мы видим, что это множество-полином образовано из множеств с индексами строго меньшими, чем β. Отсюда следует, что множество Q может быть определено, отправляясь от множеств класса K_0, при помощи *монотонных* переходов к пределу и, следовательно, то же справедливо и для множества-полинома $P(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, E_\beta)$. Значит, E_β есть нормальный член последовательности (1), что противоречит нашей гипотезе.

Во втором случае мы имеем

$$E_\beta = E_{\beta_1} \cdot E_{\beta_2} \ldots,$$

где $\beta_1 < \beta_2 < \ldots$ предшествуют β. Обозначим через π_n общую часть n первых членов последовательности $E_{\beta_1}, E_{\beta_2}, \ldots$ Бесконечная последовательность $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$, очевидно, *убывающая*, и мы имеем

$$E_\beta = \lim_{n\to\infty} \pi_n.$$

Как и в предыдущем случае, мы можем написать

$$P(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, E_\beta) = \lim_{n\to\infty} P(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, \pi_n).$$

Мы видим, что переменное множество $P(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, \pi_n)$ убывает, когда n неограниченно возрастает. Следовательно, множество $P(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, E_\beta)$ получается при помощи *монотонного* перехода к пределу.

С другой стороны, переменное множество $P(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, \pi_n)$ может быть записано в виде полинома:

$$P(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, E_{\beta_1} \cdot E_{\beta_2}, \ldots, E_{\beta_n}) = \\ = Q(E_{\beta'}, E_{\beta''}, \ldots, E_{\beta_1}, \ldots, E_{\beta_n}),$$

образованного из множеств с индексами, строго меньшими, чем β. Значит, множество Q можно определить, отправляясь от множеств начального класса K_0, при помощи *монотонных* переходов к пределу. Отсюда следует, что E_β — нормальный член последовательности (1), что противоречит нашей гипотезе.

Итак, *все члены последовательности* (1) *нормальны*. Перейдем теперь к рассмотрению данного множества E. Мы имеем:

$$E = \lim_{n\to\infty} (E_{\beta_1} + E_{\beta_2} + \ldots + E_{\beta_n})$$

или

$$E = \lim_{n\to\infty} (E_{\beta_1} \cdot E_{\beta_2} \ldots E_{\beta_n}),$$

где все E_{β_i} являются множествами, предшествующими E; так как все E_{β_i} нормальны, мы отсюда заключаем, что множество E может быть определено, отправляясь от начального класса K_0, при помощи неограниченно повторенных *монотонных* переходов к пределу. Ч. т. д.

Это предложение чрезвычайно важно, так как оно показывает, что *при изучении множеств, измеримых B, можно ограничиваться изучением начального класса K_0 и рассмотрением монотонных переходов к пределу, неограниченно повторенных и, разумеется, чередующихся* [1]).

Остается рассмотреть лишь общий (не монотонный) переход к пределу lim, а также операции взятия верхнего предела $\overline{\lim}$ и нижнего предела $\underline{\lim}$. Эти рассмотрения не представляют никакого затруднения.

---

[1]) Это основной результат теории Юнга.

Прежде всего, так как нахождение предела *монотонной* последовательности множеств есть частный случай операций $\lim$, $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$, всякое множество, измеримое B, может быть получено, отправляясь от начального класса K_0, при помощи каждой из трех операций $\lim$, $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$, неограниченно повторенных.

С другой стороны, так как каждая из этих операций может быть приведена к сложению и взятию общей части (стр. 28 и 29), то множества, которые могут быть получены, отправляясь от начального класса K_0, при помощи операций $\lim$, $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$, неограниченно повторенных, будут все измеримы B.

Проблема меры Бореля. Вышеуказанный процесс образования множеств (стр. 36) Борель ввел с целью уметь «измерять» множества.

Пусть

$$E_0,\ E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_\beta,\ \ldots \mid E \tag{1}$$

— счетная вполне упорядоченная последовательность множеств, служащая для определения множества E, измеримого B, отправляясь от порций области $\mathcal{J}$, при помощи операций: (S) — составления суммы счетного числа множеств без общих частей и (D) — взятия разности двух множеств, из которых одно содержит другое. Мы предполагаем, что все множества последовательности (1) расположены на $(0,1)$.

Следуя идеям Бореля, каждому члену последовательности (1), являющемуся порцией области $\mathcal{J}$, приписывают его *длину*. Этим способом некоторым членам последовательности (1) будут поставлены в соответствие числа, которые мы будем называть *мерами* этих множеств.

Допустим, что процесс определения меры дошел до члена E_β. В этом случае, если $E_\beta = E_{\beta_1} + E_{\beta_2} + \ldots + E_{\beta_n} + \ldots$ то Борель приписывает E_β меру mE_β, равную сумме ряда:

$$mE_{\beta_1} + mE_{\beta_2} + \ldots + mE_{\beta_n} + \ldots,$$

где E_{β_n}, в силу сделанной гипотезы, уже получило меру mE_{β_n}, так как $\beta_n < \beta$. Если же $E_\beta = E_{\beta_2} - E_{\beta_1}$, то Борель приписывает E_β меру mE_β, равную разности

$$mE_{\beta_2} - mE_{\beta_1},$$

причем множества E_{β_1} и E_{β_2} уже имеют меру, так как они предшествуют E_β, $\beta_1 < \beta$ и $\beta_2 < \beta$.

Таким образом, в принципе процесс продолжается, не останавливаясь, и пробегает последовательность (1) до тех пор, пока мы не дойдем до последнего члена E, который, таким образом, получает некоторую меру mE. Так полученное число mE называется *мерой Бореля*.

Это определение меры так естественно, как только можно, и, однако, мы наталкиваемся на следующие три затруднения:

1° Мы можем встретить расходящиеся ряды.

2° Мы можем придти к отрицательной мере.

3° Получая некоторое множество E двумя различными способами, мы можем приписать ему две разные меры.

Все эти трудности отпадают, если принять концепцию меры Лебега, так как, по самому ее определению, мера Лебега есть всегда неотрицательное число и единственное для каждого измеримого множества. И так как легко доказать, что число mE Бореля совпадает с мерой Лебега, то все трудности устранены.

Тем не менее, если рассматривать теорию меры Бореля независимо от лебеговской, очевидно, что надо внутренним образом преодолеть эти три затруднения. В этом *проблема меры Бореля*.

Не входя в рассмотрение вопроса о возможности разрешить эту проблему [1]), мы заметим, что все три затруднения сводятся ко второму, т. е. к невозможности получить *отрицательную* меру.

Прежде всего, если бы мы встретили расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE_{\beta_n},$$

---

[1]) На мой взгляд, эта проблема представляет лишь технические трудности, ее решение не требует непременно бесконечного множества операций, имеющего мощность континуума.

где множества E_{β_1}, E_{β_2}, ... попарно без общих точек, мы могли бы взять столь большое число N его членов, что их сумма превосходит 1. Останавливая последовательность (1) после того, как написаны члены E_{β_1}, E_{β_2}, ..., E_{β_N} и прибавляя затем два новых члена, из которых один есть сумма $E_{\beta_1}+E_{\beta_2}+\ldots+E_{\beta_N}$, а другой — дополнение к этой сумме по отношению к порции (0,1), мы видим, что последний член получает отрицательную меру.

Чтобы доказать, что трудность 3° также сводится к трудности 2°, допустим, что некоторое множество E было определено двумя различными последовательностями (1). Заставляя все члены одной последовательности следовать за членами другой и прибавляя к так полученной последовательности множество $\mathfrak{E}$, не содержащее ни одной точки, мы видим, что $\mathfrak{E}$ получает *отрицательную меру*, если его рассматривать как разность двух множеств E геометрически тождественных, но построенных разными способами.

Итак, все сводится к тому, чтобы доказать, что невозможно получить отрицательную меру [1]).

Множество многих измерений. Для определенности мы ограничимся случаем множеств в пространстве *двух измерений*.

Возьмем евклидово пространство $\mathfrak{E}$ двух измерений. Пусть в этом пространстве дана какая-нибудь система прямоугольных осей, которую мы обозначим через XOY.

Назовем *основной областью двух измерений* множество всех точек $M(x, y)$ плоскости XOY, у которых обе координаты x и y *иррациональны*. Эту основную область мы обозначим через $\mathcal{J}_{xy}$.

Назовем *порцией* области $\mathcal{J}_{xy}$ множество тех точек $M(x, y)$ этой области, координаты x и y которых принадлежат порциям (a, b) и (c, d), лежащим, соответственно, в линейных основных областях $\mathcal{J}_x$ и $\mathcal{J}_y$ [[3]].

Мы скажем, что множество E точек области $\mathcal{J}_{xy}$ есть *множество начального класса* K_0, если как E, так и его дополнение CE (по отношению к $\mathcal{J}_{xy}$) является суммой конечного или бесконечного множества порций области $\mathcal{J}_{xy}$.

---

[1]) В главе II мы укажем элементы, позволяющие, на наш взгляд найти решение проблемы меры Бореля.

Если мы захотим проанализировать все определения и рассмотрения, которые были даны выше и касались *линейных* множеств, то мы убедимся, что они применяются без всяких изменений к многомерным областям.

В частности, *множества, измеримые* B, это множества, которые могут быть получены из множеств начального класса K_0 при помощи операций (S), (P), $\lim$, $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ или же при помощи только монотонных переходов к пределу, неограниченно повторяемых.

ГЛАВА II

ИССЛЕДОВАНИЯ О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВ, ИЗМЕРИМЫХ *B*

Классификация множеств, измеримых *B*

Классы Валле-Пуссена. Отправляясь от начального класса K_0 при помощи основной операции lim, мы формально определяем шаг за шагом последовательные классы Валле-Пуссена [1])

$$K_0,\ K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_n,\ \ldots,\ K_\omega,\ \ldots, K_\alpha,\ \ldots \mid \Omega.$$

Класс K_α здесь определяется *логически* (т. е. *формально*), как множество всех точечных множеств E, которые являются пределами множеств E_n предыдущих классов $E = \lim E_n$, но сами не принадлежат к предыдущим классам.

---

[1]) Бэр дал лишь классификацию *функций* [4].

С тех пор было дано много классификаций множеств; среди них первая была дана Лебегом («Sur les fonctions représentables analytiquement», стр. 156). Вот принципы этой классификации: некоторое множество точек, измеримое B, называется множеством класса α, если его можно рассматривать как множество тех точек, где некоторая функция класса α обращается в нуль, и если это невозможно для функции класса меньше, чем α.

Классификация множеств, которую мы здесь принимаем, принадлежит Валле-Пуссену (см. его книгу «Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire», стр. 371). Повидимому, Валле-Пуссен более верен идее Бэра, чем Лебег, так как классификация Валле-Пуссена есть, в сущности, не что иное, как непосредственное применение принципов Бэра к классификации функций, принимающих лишь два значения 0 и 1.

Мы вводим лишь легкое изменение в эту классификацию, устраняя рациональные точки, что позволяет нам формулировать результаты в более простом виде и избегать исключительных случаев.

Из этого определения следует, что каждый класс может содержать только множества, измеримые B; обратное также справедливо: ***всякое множество точек E, измеримое B, принадлежит к некоторому определенному классу K_α***, так как E получается из начального класса K_0 при помощи операции lim, неограниченно повторенной, и каждое промежуточное множество E_β счетной вполне упорядоченной последовательности

$$E_0,\ E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_\omega,\ \ldots,\ E_\beta,\ \ldots \mid E, \tag{1}$$

служащей для определения множества E, очевидно, принадлежит к классификации Валле-Пуссена. Таким образом, мы видим, что совокупность множеств, измеримых B, совпадает с совокупностью множеств, входящих в классы Валле-Пуссена.

Ясно, что все классы классификации Валле-Пуссена не имеют попарно общих элементов.

Для удобства речи мы в дальнейшем не будем делать словесного различия между ***классом***, к которому принадлежит данное множество точек E, и ***рангом***, соответствующим этому классу. В этом смысле класс некоторого множества E есть просто конечное число или трансфинитное число второго класса.

Класс множества E будет обозначаться символом

$$\mathrm{cl}\, E.$$

Таким образом, мы будем для множества E, принадлежащего классу K_α классификации Валле-Пуссена, писать равенство

$$\mathrm{cl}\, E = \alpha.$$

Раньше мы указывали, что классы Валле-Пуссена определены лишь формальным образом, т. е. логически; чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что если один из этих классов, например K_β, пуст (лишен элементов), то весь остаток классификации

$$K_{\beta+1},\ K_{\beta+2},\ \ldots,\ K_\alpha,\ \ldots \mid \Omega$$

по необходимости также пуст, и последовательность логически определенных классов становится иллюзорной.

Итак, для того чтобы иметь концепцию вполне определенного класса K_α, надо доказать, что он не пуст, т. е. что он содержит эффективно множества. Мы видим, что речь идет о некотором рассуждении, при помощи которого можно установить *существование* множеств E, принадлежащих к этому классу K_α.

Способы, при помощи которых в настоящее время устанавливают существования в математическом анализе, могут быть разделены на четыре категории.

1° *Доказательство существования с использованием аксиомы Цермело,* полученное применением принципа произвольного выбора. В дальнейшем мы устраним этот способ рассуждения по причине тех затруднений, которые возникают при желании хорошо понять его сущность. Кроме того, этот способ рассуждения никогда не дает индивидуальных объектов, но всегда приводит нас к классам, быть может, лишенным элементов, которые можно индивидуально различить.

2° *Доказательство существования с использованием совокупности трансфинитных чисел второго класса.* Этот способ действий был впервые употреблен Лебегом в его исследованиях о функциях, не допускающих никакого аналитического изображения [1]).

3° *Доказательство существования, установленное при помощи диагонали Кантора.* Этот способ оказал науке серьезные услуги: им в теории функций доказаны важные теоремы существования.

4° *Конструктивное доказательство существования.* Бэр первый дал конструктивные примеры функций классов 0, 1, 2 и 3 в его классификации [2]). Было бы чрезвычайно желательно, чтобы исследования Бэра о конструктивном существовании множеств высших классов были продолжены и распространены, несмотря на всю их трудность. В дальнейшем мы даем лишь конструктивное доказательство существования множества (или функции) класса 4, принадлежащее Л. В. Келдыш. Трудности быстро возрастают с повышением класса множеств.

Если мы хотим проанализировать процессы, при помощи которых устанавливается существование математических объек-

---

[1]) «Sur les fonctions représentables analytiquement» (Journ. de Math., 1905, стр. 214).

[2]) R. Baire, Sur la représentation des fonctions discontinues, Acta Math., т. 30, 1905.

тов, то вот что мы практически констатируем: методы доказательства существований бывают весьма различной природы и теоретически не сводимы друг к другу; таким образом, нельзя говорить о существовании в общем смысле или в абсолютном смысле. Понятие существования математического объекта в абсолютном смысле кажется при современном состоянии науки слишком неясным, чтобы приписать ему смысл. Все, что можно сделать, это просто говорить о существовании, установленном тем или другим методом, т. е. об относительном существовании.

По этой-то причине, говоря о существовании, мы всегда будем указывать метод, в смысле которого установлено рассматриваемое существование. Так мы будем говорить о существовании в смысле совокупности Ω, о существовании в смысле диагонали и о существовании конструктивном [5].

В данный момент мы не останавливаемся на доказательствах существования множеств всех классов классификации Валле-Пуссена: мы предпочитаем принять это существование как постулат и извлечь из него все полезные следствия.

Простейшие свойства классов Валле-Пуссена. Мы сначала укажем свойства классов в некотором роде формальные, а именно те, которые являются немедленным следствием логического определения класса.

Теорема 1. *Если множество точек E принадлежит к K_α, то и его дополнение CE также принадлежит к K_α.*

По самому определению, начальный класс K_0 обладает указанным свойством.

Допустим, что существуют классы анормальные, т. е. лишенные этого свойства, и обозначим через K_β первый анормальный класс. Пусть E есть множество, принадлежащее к K_β без того, чтобы его дополнение принадлежало к K_β.

Мы тогда имеем равенство

$$E = \lim_{n \to \infty} E_n,$$

где E_n есть множество класса K_{β_n}, предшествующего K_β, $\beta_n < \beta$. Так как класс K_{β_n} нормален, то дополнение CE_n принадлежит к K_{β_n}. В силу очевидного равенства, $CE = \lim\limits_{n \to \infty} CE_n$; отсюда следует, что CE не может принадлежать к классу выше, чем β. С другой стороны, CE не может быть класса ниже β, так как K_β есть первый анормальный класс, и мы имели бы $\mathrm{cl}\,E < \beta$. Итак, мы имеем $\mathrm{cl}\,CE = \beta$, и мы пришли к противоречию.

Итак, все классы классификации Валле-Пуссена нормальны, что и доказывает наше предложение. Ч. т. д.

Теорема II. *Сумма конечного числа множеств и общая часть конечного числа множеств принадлежит к классу, не превосходящему наибольший из классов составляющих множеств.*

Теорема III. *Сумма счетного множества множеств и общая часть счетного множества множеств принадлежит к классу, не превосходящему класс, непосредственно следующий за классами всех составляющих множеств.*

Теорема IV. *Операции* $\overline{\lim}\,E_n$ *и* $\underline{\lim}\,E_n$ *приводят к множествам класса, не более, чем на единицу превосходящего тот, который непосредственно следует за классами всех множеств* E_n.

Метод доказательства этих трех теорем тот же, как и для случая теоремы 1. Мы убеждаемся, что класс 0 обладает формулированным свойством и, предполагая, что существуют «анормальные» классы, приходим к противоречию. Это есть рассуждение методом трансфинитной индукции. Чтобы не утомлять читателя повторением одних и тех же слов, мы опускаем доказательства.

Теорема V. *Множество-разность* $E_2 - E_1$ *принадлежит к классу, не превосходящему наибольший из двух классов* $\mathrm{cl}\,E_1$ *и* $\mathrm{cl}\,E_2$.

В самом деле, если $E = E_2 - E_1$, то мы можем написать $E = E_2 \cdot CE_1$, и теорема сводится к теореме II.

Достижимость

Определения. Чтобы изучить структуру каждого класса классификации Валле-Пуссена, нам нужны следующие важные определения.

Мы скажем, что множество E, принадлежащее к классу K_α, *достижимо сверху*, если E есть общая часть счетного множества множеств классов, меньших α.

Точно так же мы скажем, что множество E, принадлежащее к классу K_α, *достижимо снизу*, если E есть сумма счетного множества множеств классов, меньших α.

Из определения следует, что *если множество E класса K_α достижимо сверху, то его дополнение CE достижимо снизу и обратно.*

В самом деле, из равенства $E = E_1 \cdot E_2 \ldots$ следует равенство

$$CE = CE_1 + CE_2 + \ldots$$

Ясно, что необходимым условием для того, чтобы множество E было достижимо сверху или снизу, является равенство $E = \lim E_n$, где множество E класса ниже, чем класс E, и где $E_n \supset E$ или же $E_n \subset E$ при всяком n.

Установив эти основные определения, дадим еще некоторые весьма полезные определения.

Назовем *двусторонним* всякое множество класса K_α, достижимое одновременно сверху и снизу. Множество E класса K_α называется *односторонним*, если оно достижимо сверху или снизу, не не есть двустороннее.

Наконец, мы скажем, что множество E класса K_α *недостижимо с обеих сторон*, если оно не является достижимым ни сверху, ни снизу.

Несуществование двусторонних множеств в классах первого рода. Класс K_α классификации Валле-Пуссена будет называться *классом первого рода*, если существует класс K_{α^*}, непосредственно ему предшествующий; $\alpha = \alpha^* + 1$. В противном случае K_α будет *второго рода*.

Начальный класс K_0 мы будем считать классом второго рода.

Все классы первого рода обладают важным свойством:

Теорема. *Классы первого рода не могут содержать двусторонних множеств.*

В самом деле, пусть E есть множество, принадлежащее к классу $K_{\alpha+1}$. Если E двустороннее, то мы имеем

$$E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$$

и

$$CE = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n + \ldots,$$

где все ε_n и η_n — множества классов $\leqslant \alpha$ попарно без общих точек.

Следовательно, мы можем писать

$$\varepsilon_n = \lim_{k \to \infty} \varepsilon_n^{(k)} \text{ и } \eta_n = \lim_{k \to \infty} \eta_n^{(l)},$$

где множества с двумя индексами $\varepsilon_n^{(k)}$ и $\eta_n^{(k)}$ все класса ниже α.

Установив это, возьмем множество E_n, определенное следующим равенством:

$$E_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{(n)} \cdot C\eta_1^{(n)} \cdot C\eta_2^{(n)} \ldots C\eta_n^{(n)}.$$

Ясно, что $\mathrm{cl}\, E_n < \sigma$.

Мы докажем, что множество E_n имеет своим пределом множество E, когда n неограниченно возрастает.

Если точка x принадлежит к E, то существует составляющее множество для E, пусть ε_i, которое содержит x. Значит, точка x принадлежит к каждому из множеств $\varepsilon_i^{(n)}$ для достаточно большого n. С другой стороны, эта точка не принадлежит к CE; значит, она не принадлежит ни одному из i множеств $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i$. Так как i есть постоянное число, то x не входит ни в одно из i множеств $\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}, \ldots, \eta_i^{(n)}$ для достаточно большого n. Отсюда мы заключаем, что x принадлежит каждому из i дополнительных множеств $C\eta_1^{(n)}$, $C\eta_2^{(n)}, \ldots, C\eta_i^{(n)}$ и, следовательно, принадлежит к E_n при достаточно большом n.

Если точка x принадлежит к CE, то существует такое число i, что x принадлежит к η_i. Следовательно, x не принадлежит ни к одному из i множеств $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{i-1}$ и $C\eta_i$. Так как индекс i постоянен, мы отсюда заключаем, что x не принадлежит ни одному из множеств $\varepsilon_1^{(n)}, \varepsilon_2^{(n)}, \ldots, \varepsilon_{i-1}^{(n)}$ и $C\eta_i^{(n)}$, если только число n достаточно велико. Из определения множества E_n следует, что x не принадлежит к E_n при достаточно большом n.

Таким образом, мы вынуждены заключить, что бесконечная последовательность множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ сходится и имеет E своим пределом. А так как $\mathrm{cl}\, E_n < \alpha$, то класс E не может превосходить α, что противоречиво, ибо $\mathrm{cl}\, E = \alpha + 1$, Итак, множество класса $K_{\alpha+1}$ не может быть двусторонним. Ч. т. д.

Теорема о знакочередующихся рядах. Мы теперь докажем одну теорему, которая будет очень полезна в дальнейшем.

Теорема. *Если множество точек E есть сумма убывающего знакочередующегося ряда множеств классов, меньших α, то множество E либо класса ниже α, либо двустороннее класса α.*

В самом деле, пусть

$$E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \ldots,$$

где

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots \text{ и } \mathrm{cl}\, E_n < \alpha.$$

Так как мы можем писать (стр. 36)

$$E = (E_1 - E_2) + (E_3 - E_4) + (E_5 - E_6) + \ldots$$

и

$$CE = CE_1 + (E_2 - E_3) + (E_4 - E_5) + \ldots,$$

мы заключаем, что *или* $\mathrm{cl}\, E < \alpha$ *или* E есть двустороннее класса α, что возможно только в том случае, когда α *второго рода*, т. е. является предельным классом. Ч. т. д.

Мы дополним этот результат следующими замечаниями:

Замечание I. Если E есть сумма убывающего знакочередующегося ряда множеств классов $\leqslant \alpha$, то класс E также $\leqslant \alpha$.

В самом деле, класс $K_{\alpha+1}$ не может содержать двусторонних множеств.

Замечание II. Если E есть сумма убывающего знакочередующегося ряда множеств *либо класса* $< \alpha$, *либо двусторонних* класса K_α, то множество E также *либо класса* $< \alpha$, *либо двустороннее класса* K_α.

В самом деле, формулы

$$E = (E_1 - E_2) + (E_3 - E_4) + \ldots$$

и

$$CE = CE_1 + (E_2 - E_3) + (E_4 - E_5) + \ldots$$

показывают, что E и CE являются суммами множеств класса $< \alpha$. Значит, *либо* $\mathrm{cl}\, E < \alpha$, *либо* E есть двустороннее класса α.

Структура классов

Чтобы изучить структуру классов классификации Валле-Пуссена, мы постулируем существование множеств E всякого класса.

Значит, мы предполагаем, что каков бы ни был класс K_α классификации Валле-Пуссена, существуют множества E, принадлежащие к K_α.

Из этого постулата мы теперь извлечем важные следствия, касающиеся структуры каждого класса K_α классификации Валле-Пуссена.

Лемма 1. *Если классы, предшествующие некоторому классу второго рода K_α, не лишены элементов, то в классе K_α содержатся двусторонние множества.*

В самом деле, пусть K_α — предельный класс (т. е. *второго рода*) и пусть

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$$

есть бесконечная последовательность возрастающих трансфинитных чисел, имеющих α своим пределом.

Раз класс K_{α_n} не лишен элементов, то существуют множества этого класса; пусть E_n и есть множество, принадлежащее к K_{α_n}. Мы можем предположить, что это множество E_n содержится в порции $(n-1,\ n)$ основной области $\mathcal{J}$, так как можно преобразовать всю область $\mathcal{J} = (-\infty, +\infty)$ в порцию $(n-1,\ n)$ при помощи непрерывной возрастающей функции так, чтобы всякая порция области $\mathcal{J}$ преобразовалась в некоторую порцию из $(n-1,\ n)$ и обратно: это преобразование[1]) приведет в соответствие всякому множеству E, измеримому B и лежащему в области $\mathcal{J}$, множество E', также измеримое B и *того же класса*, лежащее в $(n-1,\ n)$.

---

[1]) Чтобы увидеть возможность подобного преобразования, заметим сначала, что преобразование $x' = \dfrac{x}{1+x}$ преобразует указанным способом бесконечную порцию $(0, +\infty)$ в конечную порцию $(0, +1)$. Отсюда следует, что можно преобразовать указанным образом всю область $\mathcal{J}$ в порцию $(-1, +1)$. С другой стороны, всякую конечную порцию можно преобразовать в любую конечную порцию при помощи *линейного* преобразования с *рациональными* коэффициентами.

Установив это, рассмотрим множество E, определенное равенством

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$$

Ясно, что $\mathrm{cl}\, E \leqslant \alpha$. Но мы не можем иметь $\mathrm{cl}\, E < \alpha$. В самом деле, если $\mathrm{cl}\, E < \alpha$, то существует такое число α_n, что мы имеем неравенство $\mathrm{cl}\, E < \alpha_n < \alpha$, ибо α есть предел чисел α_n. А так как класс общей части E и любой порции области $\mathcal{J}$ никогда не превзойдет класса E, то мы приходим к противоречию, так как общая часть E и $(n-1, n)$ есть множество E_n, класс которого α_n превосходит $\mathrm{cl}\, E$.

Итак, множество E есть в точности класса α.

Обозначим через $\mathcal{E}_n$ дополнение к E_n относительно порции $(n-1, n)$. Ясно, что $\mathrm{cl}\, \mathcal{E}_n = \mathrm{cl}\, E_n = \alpha_n$. Мы, очевидно, имеем:

$$CE = (-\infty, 0) + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_n + \ldots \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2) показывают нам, что E и CE достижимы снизу. Значит, E есть *двустороннее* множество класса α. Ч. т. д.

Лемма 2. *Если класс K_α первого рода не лишен элементов, то в этом классе есть множества односторонние и множества, недостижимые с обеих сторон.*

В самом деле, в классе K_α не может существовать двусторонних множеств. Значит, если E есть множество класса α, то возможны только два случая:

В первом случае множество E достижимо только с одной определенной стороны; в этом случае его дополнение CE есть тоже одностороннее множество, но уже достижимое с другой стороны. Так как область $\mathcal{J}$ может быть преобразована в порцию при помощи непрерывной возрастающей функции, то существуют в каждой порции (a, b) области $\mathcal{J}$ односторонние множества класса α, достижимые сверху и достижимые снизу.

Установив это, возьмем на $(0, +\infty)$ множество E_1 класса α, достижимое сверху, и в $(-\infty, 0)$ множество E_2 класса α, достижимое снизу. Ясно, что сумма $E_1 + E_2$ есть множество класса α, недостижимое с обеих сторон.

Во втором случае множество E недостижимо с обеих сторон, Возьмём равенство

$$E = \lim_{n\to\infty} E_n,$$

где E_n есть множество класса $< \alpha$. Так как операция lim есть частный случай операции $\overline{\lim}$, мы можем написать

$$E = (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots)(E_2 + E_3 + \ldots)(E_3 + \ldots)\ldots$$

Я теперь утверждаю, что среди скобок имеется не более конечного числа таких, классы которых $< \alpha$. В самом деле, в противном случае E было бы достижимо сверху, так как мы могли бы стереть все скобки класса $< \alpha$ без того, чтобы общая часть оставшихся скобок изменилась.

Итак, существуют скобки, класс которых в точности равен α. Ясно, что это будут множества, *достижимые снизу*, так как $\mathrm{cl}\, E_n < \alpha$. Итак, второй случай сводится к первому. Ч. т. д.

Лемма 3. *Если класс K_α второго рода содержит множество, которое не является двусторонним, то он содержит множества односторонние и недостижимые с обеих сторон.*

Доказательство этой леммы тождественно с предыдущим, так как гипотеза, что α первого рода, была введена лишь для того, чтобы получить множество, которое не будет двусторонним.

Чтобы закончить изучение структуры классов, нам потребуется одно важное предложение, показывающее, какую особую роль играют двусторонние множества в классификации Валле-Пуссена.

Теорема. *Предел последовательности двусторонних множеств класса α есть всегда множество класса $\leqslant \alpha$.*

Чтобы доказать эту теорему, возьмем такое множество, что

$$E = \lim_{n\to\infty} E_n,$$

где все E_n — двусторонние множества класса α.

Мы имеем следующие равенства:

$$E = (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots) \cdot (E_2 + E_3 + \ldots) \cdot (E_3 + \ldots)\ldots$$

и

$$E = (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \ldots) + (E_2 \cdot E_3 \ldots) + (E_3 \ldots) + \ldots$$

Так как каждое E_i есть двустороннее класса α, то все скобки в обоих разложениях E оказываются множествами класса $\leqslant \alpha$. Значит, если бы множество E было класса $\alpha+1$, оно было бы двусторонним в $K_{\alpha+1}$. Но это невозможно, так как класс $K_{\alpha+1}$ первого рода. Ч. т. д.

Итак, *операция предела двусторонних множеств класса* α *не повышает класса.*

Теперь мы можем формулировать основное предложение:

Основная теорема о структуре классов. *Всякий класс* $K_{\alpha+1}$ *первого рода образован из множеств односторонних и недостижимых с обеих сторон; всякий класс* K_α *второго рода содержит, кроме того, двусторонние множества.*

Эта теорема есть синтез трех предыдущих лемм.

В самом деле, если K_α первого рода, то достаточно предположить, что в K_α есть множества: в силу леммы 2 существование множества в K_α влечет за собой существование *в классе* K_α *множеств всех возможных видов.*

Если K_α второго рода, достаточно предположить, что есть множества в *следующем* классе $K_{\alpha+1}$; в силу леммы 3 существование множества в $K_{\alpha+1}$ влечет существование в K_α множеств всех видов.

Интересно заметить, что если α второго рода, недостаточно существования в K_α одного множества, так как оно может оказаться двусторонним. Напротив, существование множества в следующем классе $K_{\alpha+1}$ влечет существование в K_α множеств, которые не будут двусторонними, так как нельзя получить множество класса $\alpha+1$ переходом к пределу, отправляясь от двусторонних множеств. В этих условиях лемма 3 применима.

С другой стороны, всякое множество E класса α второго рода, очевидно, может быть получено как предел двусторонних множеств класса α.

Окончательно мы приходим к следующему заключению о структуре классов второго рода в классификации Валле-Пуссена: двусторонние множества образуют очень важную составную часть каждого класса второго рода. В образовании множеств, измеримых B, можно сравнить роль двусторонних множеств с ролью множеств начального класса K_0: порции начального класса K_0 играют ту же роль, как множества классов, меньших α, а другие множества из K_0 играют ту же роль, как множества двусторонние, тогда как односторонние множества и множества, недостижимые с обеих сторон класса K_α второго рода, играют ту же роль, как множества класса K_1 [1]).

В силу особых свойств двусторонних множеств мы назовем *базой* каждого предельного класса K_α множество всех двусторонних множеств и обозначим ее через B_α.

Отделимость

Мы теперь введем одно очень важное определение, которое в дальнейшем будет играть самую существенную роль.

Мы скажем, что два множества E_1 и E_2 класса α первого рода *отделимы*, если можно построить два множества H_1 и H_2 классов ниже α без общей части, которые содержат соответственно множества E_1 и E_2; множества H_1 и H_2 будем называть *отделяющими*. Точно так же назовем *отделимыми* два множества E_1 и E_2 класса K_α второго рода, не принадлежащие к базе B_α, если отделяющие множества H_1 и H_2 принадлежат к этой базе. Наконец, два множества E_1 и E_2 базы B_α называются *отделимыми*, если классы отделяющих множеств H_1 и H_2 меньше α.

Эти определения имеют *качественный* характер, так как они дают нам лишь идею отдаленности двух множеств, без того, чтобы эта отдаленность могла быть точно измерена. В дальнейшем мы дадим *дескриптивную меру* «расстояния» двух множеств, измеримых B.

Пока же мы ограничимся указанием на то, что два множества E_1 и E_2, лежащие в двух непересекающихся порциях (a_1, b_1) и (a_2, b_2) основной области $\mathcal{J}$, должны быть рассматриваемы как *чрезвычайно отдаленные*. Взаимное отдаление множеств E_1 и E_2, измеримых B, становится тем меньше, чем выше класс отделяющих их множеств H_1 и H_2.

Элементы класса K_α. Мы рассмотрели структуру классов классификации Валле-Пуссена. Чтобы анализировать структуру

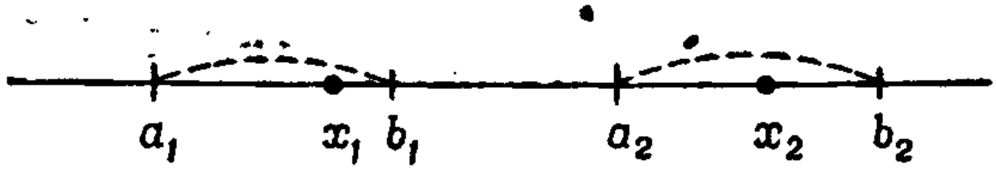
---

[1]) Представляется естественным объединить классы 0 и 1 в один и рассматривать его как предельный класс. Быть может, в этом и заключается причина, по которой теорема Бэра относится к функциям класса $\leqslant 1$, а не только класса 1.

самих *множеств* данного класса K_α, мы примем за инструмент множества, *достижимые сверху*.

Назовем *элементом* всякое множество класса K_α, достижимое сверху, но не принадлежащее к базе B_α, когда класс K_α второго рода.

Введение понятия элемента класса α очень естественно по причине многочисленных и глубоких аналогий между элементами любого класса и *обыкновенными точками*.

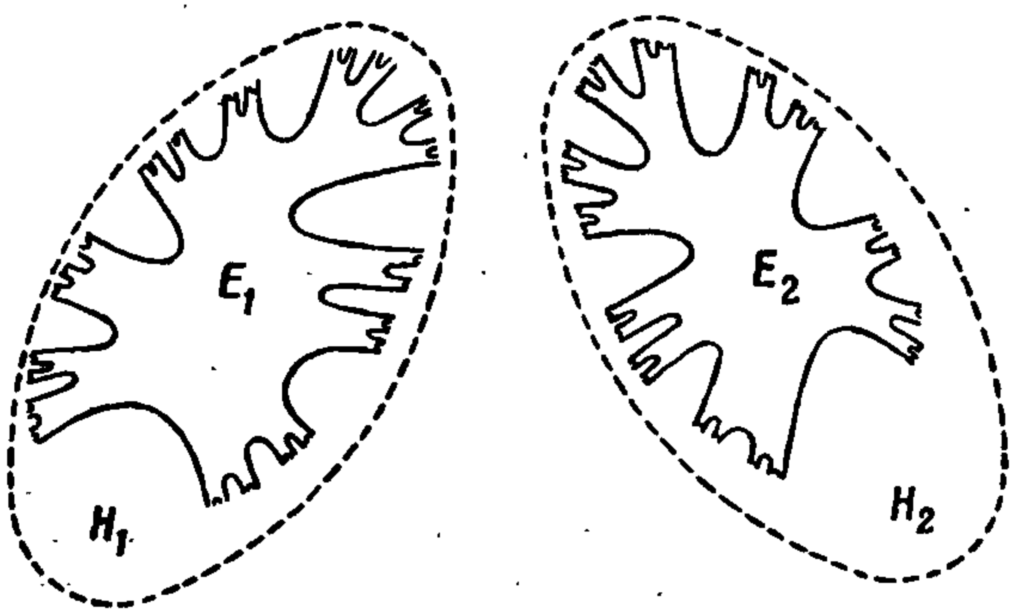


Черт. 2.

Отдельно взятая точка есть элемент класса 1. Если x_1 и x_2 — две различные точки, они отделимы при помощи порций (a_1, b_1) и (a_2, b_2) основной области $\mathcal{J}$.

Мы имеем глубокую и полную аналогию между этим свойством *точек* и следующим свойством *элементов* класса K_α: два любых элемента класса K_α без общей части всегда отделимы при помощи множеств низших классов или множеств, принадлежащих базе B_α.

Это мы изображаем на следующем схематическом чертеже, где символические границы элементов E_1 и E_2 должны быть тем более иззилисты, чем выше класс α.



Черт. 3.

Мы теперь переходим к доказательству основной теоремы об отделимости элементов, не имеющих общей части.

Основная теорема. *Два элемента любого класса K_α без общей части всегда отделимы.*

Пусть E и $\mathcal{E}$ — два элемента класса K_α без общей части.

Так как E и $\mathcal{E}$ суть множества, достижимые сверху, то мы можем образовать две убывающие последовательности множеств класса $< \alpha$

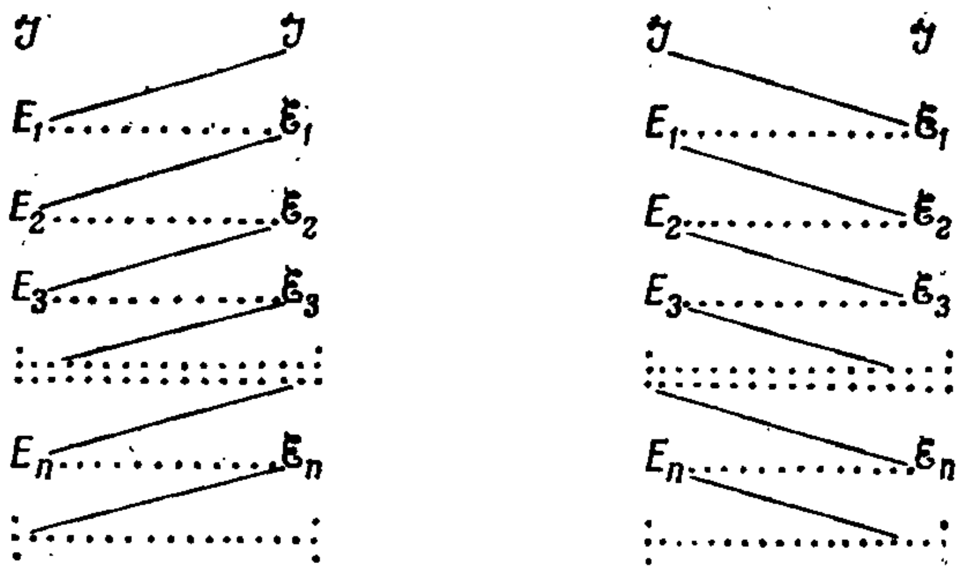
$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$$

и

$$\mathcal{E}_1 \supset \mathcal{E}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{E}_n \supset \ldots$$

такие, что предел первой из них есть элемент E, а предел второй — элемент $\mathcal{E}$.

Установив это, напишем две вертикальные схемы:



и возьмем все произведения двух букв, лежащих на одной и той же наклонной прямой со знаком $+$, а произведения двух букв, стоящих на одной и той же горизонтальной прямой со знаком $-$. Мы получим, таким образом, два убывающих знакочередующихся ряда множеств классов $< \alpha$

$$\mathcal{J} E_1 - E_1\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_1 E_2 - E_2\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_2 E_3 - \ldots$$

и

$$\mathcal{J} \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1 E_1 + E_1\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2 E_2 + \mathcal{E}_2 E_3 - \ldots$$

Эти ряды множеств, очевидно, сходятся, так как элементы E и $\mathcal{E}$ не имеют общей части и, следовательно, общий член обоих рядов имеет пределом пустое множество.

Пусть H_1 есть сумма первого и H_2 — сумма второго ряда.

Возьмем теперь любую точку x области $\mathcal{J}$ и предположим, что она принадлежит к k членам левой колонны и к l членам правой колонны предыдущей вертикальной схемы. Так как первым членом в обеих колоннах стоит $\mathcal{J}$, то $k \geqslant 1$ и $l \geqslant 1$.

Надо различать три случая:

Первый случай: $k < l$. В этом случае точка x не принадлежит к H_1, но принадлежит к H_2.

Второй случай: $k = l$. В этом случае точка x не принадлежит ни к H_1, ни к H_2.

Третий случай: $k > l$. В этом случае точка x принадлежит к H_1, но не принадлежит к H_2.

Отсюда следует, что множества H_1 и H_2 не имеют общей точки.

Так как общий член обоих рядов есть множество класса $< \alpha$, то множества H_1 и H_2 либо класса $< \alpha$, либо принадлежат к базе B_α (стр. 58).

Наконец, ясно, что $E \subset H_1$ и $\mathfrak{E} \subset H_2$. Значит, множества H_1 и H_2 — отделяющие для данных элементов E и $\mathfrak{E}$. Ч. т. д.

Итак, мы имеем полную аналогию между отделимостью двух различных *точек* и двух *элементов* без общей части. То же справедливо и для аналогии между одновременной отделимостью *конечного числа* различных *точек* при помощи отделяющих порций области $\mathcal{J}$, не перекрывающихся между собой, и одновременной отделимостью *конечного числа элементов* без общих частей при помощи отделяющих множеств, также попарно не перекрывающихся. В самом деле, мы можем дополнить доказанную теорему следующим следствием:

Элементы класса K_α в конечном числе, не имеющие попарно общих частей, одновременно отделимы, т. е. могут быть соответственно заключены в отделяющие множества либо класса $< \alpha$, либо базы B_α, попарно без общих точек [1].

---

[1]) Эту теорему можно рассматривать, как первый шаг на пути к автономной теории меры Бореля. В самом деле, лишь только все множества классов, меньших α, получили меру Бореля, элементы класса K_α ею также обладают. И предложение текста показывает нам, что мы никогда не встретим *расходящихся* рядов мер Бореля элементов класса K_α, так как в противном случае в силу одновременной отделимости элементов мы имели бы отрицательные меры Бореля в классах, предшествующих α. С другой стороны, каждое множество E класса α состоит из элементов (стр. 71).

В самом деле, пусть $E_1, E_2, \ldots, E_m$ — элементы класса K_α, не имеющие попарно общих точек; число m конечно.

Возьмем два любых элемента E_i и E_j, $i \neq j$. Так как эти элементы отделимы, мы можем обозначить через H_{ij} и H_{ji} отделяющие множества $E_i \subset H_{ij}$ и $E_j \subset H_{ji}$; множества H_{ij} и H_{ji} не имеют общей точки и будут либо класса $< \alpha$, либо из базы B_α.

Установив это, возьмем общую часть всех множеств H_{ij}, где первый индекс фиксирован, а второй принимает все значения $1, 2, \ldots, m$, кроме значения i. Эту общую часть мы обозначим через H_i.

Ясно, что множество H_i содержит множество E_i и что оно либо класса $< \alpha$, либо из базы B_α. Кроме того, так как два множества H_{ij} и H_{ji} не имеют общей точки, то мы заключаем, что и два множества H_i и H_j также не имеют ни одной общей точки.

Значит, одновременное отделение элементов $E_1, E_2, \ldots$ $\ldots, E_m$ при помощи множеств $H_1, H_2, \ldots, H_m$ реализовано. Ч. т. д.

Очень естественно теперь поставить следующий вопрос: *будет ли эта одновременная отделимость опять иметь место, если речь зайдет о счетном множестве элементов попарно без общей части?*

Мы видим немедленно, что ответ отрицателен, даже когда дело касается *точек* области $\mathcal{J}$: достаточно взять любое счетное множество точек, *всюду плотное* на $\mathcal{J}$. Хотя любые две точки этого множества заведомо отделимы при помощи порций, но нельзя отделить одновременно все точки этого множества.

Тем не менее и здесь имеется полная аналогия между *точками* и *элементами*. Чтобы выявить эту аналогию, полезно ввести понятие изолированного элемента.

Изолированные множества. Известно, что точка x множества E называется *изолированной* во множестве E, если можно найти порцию (a, b) области $\mathcal{J}$, содержащую x и не содержащую никакой другой точки из E. Для того чтобы точка x из E была одновременно отделима от всех остальных точек E, необходимо и достаточно, чтобы x была изолированной в E. Именно по этой причине мы будем изучать множества точек, называемые *изолированными*.

По определению, множество точек E есть *изолированное*, если каждая его точка изолирована. Изолированное множество точек E непременно счетно

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{E}$$

и нетрудно доказать, что точки изолированного множества всегда одновременно (т. е. равномерно) отделимы: достаточно заключить его точки в ряд порций области $\mathcal{J}$, причем каждая из порций имеет диаметр, не превосходящий половину нижней грани расстояний между рассматриваемой точкой и другими точками множества.

Возьмем теперь в качестве путеводной нити указанную аналогию между *точками* и *элементами*.

Пусть дана бесконечная последовательность элементов класса K_α попарно без общих частей

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots;$$

мы назовем *изолированным* в этой последовательности всякий элемент e_i такой, что можно определить множество H_i *либо* класса $< \alpha$, *либо* из базы B_α, которое содержит e_i и не имеет общей части ни с одним из остальных элементов последовательности.

Последовательность элементов класса

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

мы назовем *изолированной* в том случае, когда каждый из ее элементов изолирован в этой последовательности.

Следующее предложение, вполне аналогичное тому, которое касается изолированных последовательностей точек:

Теорема. *Все элементы изолированной последовательности класса K_α могут быть одновременно (равномерно) отделены.*

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ — бесконечная изолированная последовательность элементов класса K_α. Для заданного целого положительного числа n обозначим через H_n множество, отделяющее e_n от остальных элементов последовательности; значит, H_n *либо* множество класса $< \alpha$, *либо* из базы B_α и содержит элемент e_n, не имея общей части ни с каким другим элементом последовательности.

Установив это, возьмем множество θ_n, определенное равенством

$$\theta_n = H_n \cdot CH_1 \cdot CH_2 \cdot \ldots \cdot CH_{n-1},$$

каково бы ни было n.

Ясно, что θ_n *либо* класса $< \alpha$, *либо* из базы B_α и что оно содержит элемент e_n.

Так как множества

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots,$$

очевидно, попарно без общих частей, то одновременное отделение элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ осуществлено. Ч. т. д.

Мы теперь возвратимся с несколько более общей точки зрения к вопросам, касающимся изолированных семейств, рассматривая случай любых множеств.

Пусть F есть семейство, образованное из любых множеств.

Мы скажем, что множество E, принадлежащее к F, *изолировано* в F относительно класса K_α, если существует множество H *либо* класса $< \alpha$, *либо* из базы B_α, которое содержит E и не имеет общей части ни с одним из остальных множеств семейства F.

Семейство F, каждое из множеств которого изолировано относительно K_α, само называется *изолированным* относительно K_α.

Доказательство предыдущей теоремы снова применимо, и мы можем формулировать несколько более общее предложение:

Всякое счетное семейство F, изолированное относительно класса K_α, равномерно изолировано, т. е. все множества E из F можно одновременно заключить в ряд множеств H попарно без общих частей и класса $< \alpha$ или из базы B_α.

Важно знать природу множеств, которые можно получить, составляя сумму членов изолированного семейства. Вот общее предложение:

Теорема. *Сумма членов счетного семейства, изолированного относительно K_α и образованного из множеств класса $\leqslant \alpha$, есть множество класса $\leqslant \alpha$.*

Пусть F есть семейство, образованное из множеств $E_1, E_2, \ldots$ класса $\leqslant \alpha$. Так как F изолировано относительно K_α, существует последовательность $H_1, H_2, \ldots$ множеств *либо* класса

$<\alpha$, *либо* из базы B_α попарно без общих частей и таких, что $E_i \subset H_i$.

Возьмем равенства

$$E_i = \lim_{k\to\infty} E_i^{(k)},$$

где $\operatorname{cl} E_i^{(k)} < \alpha$.

Множество S_n, определенное равенством

$$S_n = E_1^{(n)} \cdot H_1 + E_2^{(n)} \cdot H_2 + \ldots + E_n^{(n)} \cdot H_n$$

будет *либо* класса $<\alpha$, *либо* из базы B_α.

Пусть x — произвольная точка области $\mathcal{J}$. Следует различать два случая:

В первом случае точка x принадлежит к сумме $E_1 + E_2 + \ldots$ Значит, существует целое положительное число i такое, что x принадлежит к E_i и, следовательно, к $E_i^{(n)}$ при достаточно большом n. Так как мы имеем $E_i \subset H_i$, то x принадлежит к S_n при достаточно большом n.

Во втором случае точка x не принадлежит к сумме $E_1 + E_2 + \ldots$ Если x не принадлежит ни одному из множеств H_i, оно не принадлежит и к S_n, каково бы ни было n. Если x принадлежит к некоторому H_i, то x не принадлежит ни к какому другому из множеств H_j, $j \neq i$, так как множества H_1, H_2, ... не имеют общих частей. Отсюда следует, что точка x перестает принадлежать к S_n, как только $E_i^{(n)}$ перестает содержать x, что произойдет при достаточно большом n.

Отсюда мы заключаем, что сумма $E_1 + E_2 + \ldots$ есть предел сходящейся последовательности $S_1, S_2, \ldots$, а так как S_n либо класса $<\alpha$, либо из базы B_α, то мы имеем:

$$\operatorname{cl}(E_1 + E_2 + \ldots) \leqslant \alpha. \text{ Ч. т. д.}$$

Мы дополним этот результат следующими замечаниями:

Замечание I. *Для того чтобы сумма членов счетного семейства множеств класса $\leqslant \alpha$, изолированного относительно K_α, была множеством класса K_α, недостижимым снизу, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один из членов семейства был недостижимым снизу.*

Условие необходимо, так как в противном случае каждый член E_i рассматриваемого семейства достижим снизу, и, следовательно, и сумма $E_1 + E_2 + \ldots$ тоже.

Условие достаточно, так как если сумма $E_1 + E_2 + \ldots$ достижима снизу, то это же справедливо для ее общей части с H_i; но эта общая часть есть как раз E_i.

Замечание II. *Если члены E_i счетного семейства, изолированного относительно K_α, суть элементы класса K_α и если сумма $H_1 + H_2 + \ldots$ отделяющих множеств будет либо класса $< \alpha$, либо из базы B_α, то сумма $E_1 + E_2 + \ldots$ есть элемент класса K_α.*

В самом деле, в силу предыдущего случая сумма $E_1 + E_2 + \ldots$ недостижима снизу и класса K_α. С другой стороны, возьмем убывающую последовательность множеств класса $< \alpha$

$$E_1^{(i)} \supset E_2^{(i)} \supset \ldots \supset E_n^{(i)} \supset \ldots,$$

определяющую элемент E_i, где i — любое целое положительное число. Пусть R_n есть сумма $H_{n+1} + H_{n+2} + \ldots$ В этих условиях множество S_n, определенное равенством

$$S_n = E_n^{(1)} \cdot H_1 + E_n^{(2)} \cdot H_2 + \ldots + E_n^{(n)} \cdot H_n + R_n,$$

есть, очевидно, либо класса $< \alpha$, либо из базы B_α.

Но последовательность множеств $S_1, S_2, \ldots$ убывающая и имеет пределом сумму $E_1 + E_2 + \ldots$ Значит, $E_1 + E_2 + \ldots$ непременно будет элементом класса K_α. Ч. т. д.

Первые сведения о структуре множества точек данного класса

Произвольное множество данного класса. Если мы хотим проанализировать структуру множества данного класса K_α, то вполне естественно попробовать разложить это множество на счетное множество *элементов* класса K_α по причине полной аналогии между элементами и обыкновенными точками.

Прежде всего мы имеем следующее важное предложение:

Теорема. Всякое множество класса K_α *есть сумма счетного множества элементов класса $\leqslant \alpha$, не имеющих попарно общих частей.*

Чтобы доказать это, предположим, что теорема верна для всех классов β, меньших, чем α, и покажем, что она тогда верна и для класса α.

Пусть E — любое множество класса K_α. Мы имеем равенство

$$E = \lim_{n\to\infty} E_n,$$

где $\mathrm{cl}\, E_n < \alpha$.

Так как операция lim есть частный случай операции $\overline{\lim}$, мы можем написать

$$E = (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \ldots) + (CE_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \ldots) + (CE_2 \cdot E_3 \ldots) + \ldots$$

Ясно, что скобки представляют собой множества, не имеющие попарно общих частей, и что класс каждой из скобок $\leqslant \alpha$.

Если класс некоторой скобки меньше α, то эта скобка, по сделанной гипотезе, есть сумма счетного множества элементов класса $< \alpha$ без общих частей. Если скобка есть двустороннее множество класса K_α, то она является суммой счетного числа множеств класса $< \alpha$ и, следовательно, суммой счетного множества элементов класса $< \alpha$.

Но если скобка есть множество класса α и притом не двустороннее в этом классе, то она должна быть элементом класса K_α. Итак, E есть сумма счетного множества элементов класса $\leqslant \alpha$ без общих частей.

Так как каждое множество E класса K_0 есть сумма счетного множества порций области $\mathcal{J}$, то теорема верна для $\alpha = 0$ и, следовательно, верна для любого α. Ч. т. д.

Таким образом, *каждое множество E класса K_α может быть написано в форме*

$$E = e_1 + e_2 + \ldots + e_n + \ldots,$$

где e_n *есть элемент класса* $\leqslant \alpha$, *причем все* e_n *попарно без общих частей.*

Обратное заключение неверно, так как сумма счетного множества элементов класса $\leqslant \alpha$ без общей части может оказаться эффективно класса выше α: это, очевидно, тот случай, когда E есть множество класса $K_{\alpha+1}$, *достижимое снизу.*

По этой причине очень естественно искать *необходимые и достаточные условия для того, чтобы сумма счетного множества элементов класса K_α не давала повышения класса.*

Легко отдать себе отчет в чрезвычайной важности этой проблемы. В самом деле, если нам удастся найти *достаточные* условия для того, чтобы класс повышался, мы в то же время получим эффективный процесс для реального *построения* множеств все более и более высоких классов, а этого нам в данный момент нехватает.

Мы дадим несколько предварительных результатов по этому вопросу.

Теорема. *Если основная область $\mathcal{J}$ полностью разбита на счетное множество неперекрывающихся элементов E_n класса $< \alpha$, то сумма бесконечного множества элементов E_n, выбранных произвольно, будет всегда класса $< \alpha$ или принадлежать к базе B_α. Обратно, если сумма счетного множества неперекрывающихся элементов класса $< \alpha$ есть множество класса $< \alpha$ или из базы B_α, то эти элементы образуют часть полного разбиения всей области $\mathcal{J}$ на счетное множество элементов класса $< \alpha$.*

В самом деле, если мы имеем разбиение

$$\mathcal{J} = \varepsilon_1 + \eta_1 + \varepsilon_2 + \eta_2 + \ldots + \varepsilon_n + \eta_n + \ldots,$$

где ε_i и η_i суть элементы класса $< \alpha$, то множества S и T, определенные равенствами

$$S = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$$

и

$$T = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n + \ldots$$

будут *либо* класса $< \alpha$, *либо* достижимые снизу класса K_α. А так как S и T взаимно дополнительны, они достижимы сверху и, следовательно, они двусторонние множества класса K_α.

Обратно, если E есть множество *либо* класса $< \alpha$, *либо* из базы B_α, то таким же будет и его дополнение CE. Следовательно, в силу предыдущей теоремы мы имеем два разложения, для E и для CE, в ряды элементов класса $< \alpha$

$$E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$$

и

$$CE = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n + \ldots$$

Если эти разложения сложить почленно, то очевидно получится разбиение всей области $\mathcal{J}$ на счетное множество элементов класса $< \alpha$ попарно без общих частей:

$$\mathcal{J} = E + CE = \varepsilon_1 + \eta_1 + \varepsilon_2 + \eta_2 + \ldots + \varepsilon_n + \eta_n + \ldots,$$

что и доказывает формулированную теорему. Ч. т. д.

Мы дополним этот результат следующим предложением, которое может играть роль критерия, позволяющего убедиться в том, что класс суммы бесконечного множества элементов не повысился:

Теорема. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы сумма счетного множества элементов класса $\leqslant \alpha$ без общих частей была класса $\leqslant \alpha$, состоит в том, чтобы она была частью полного разбиения всей области $\mathcal{J}$ на счетное множество элементов класса $\leqslant \alpha$ без общих частей.*

Условие необходимо. Если множество-сумма $S = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$ будет класса $\leqslant \alpha$, то его дополнение CS также класса $\leqslant \alpha$. Значит, мы можем разложить CS на сумму элементов класса $\leqslant \alpha$ и написать $CS = \eta_1 + \eta_2 + \ldots$ Складывая эти разложения почленно, мы получим искомое разбиение $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J} = \varepsilon_1 + \eta_1 + \varepsilon_2 + \eta_2 + \ldots$$

Условие достаточно. Если мы имеем разбиение области $\mathcal{J}$ на счетное множество элементов класса $\leqslant \alpha$

$$\mathcal{J} = \varepsilon_1 + \eta_1 + \varepsilon_2 + \eta_2 + \ldots,$$

то сумма

$$S = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$$

не может быть класса $K_{\alpha+1}$, так как, в противном случае, множество S и его дополнение

$$T = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n + \ldots$$

были бы множествами, достижимыми снизу класса $\alpha + 1$, следовательно, двусторонними, что невозможно, так как класс $K_{\alpha+1}$ первого рода[1]).

---

[1]) Вот немедленное обобщение этой теоремы: *если множество E класса $\leqslant \alpha$ разложено на счетное множество множеств класса $\leqslant \alpha$ попарно без общих точек, то каждая часть P этого разложения есть множество класса $\leqslant \alpha$.*

Чтобы доказать это, достаточно заметить, что каждое из составляющих множеств есть сумма счетного множества элементов класса

Критерий неповышения класса. Мы дадим критерий того, чтобы сумма элементов класса $\leqslant \alpha$ была класса $\leqslant \alpha$ в такой форме, которая нам будет полезна при более углубленном анализе структуры множеств точек данного класса.

Вот этот критерий.

Теорема. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы сумма $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ счетного множества элементов класса $\leqslant \alpha$ попарно без общих частей была класса $\leqslant \alpha$, состоит в том, чтобы можно было заключить каждый элемент E_n во множество H_n либо класса $< \alpha$, либо из базы B_α так, что* $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = 0$.

Условие необходимо. В самом деле, если $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ будет класса $\leqslant \alpha$, то и его дополнение CE также класса $\leqslant \alpha$. Следовательно, мы имеем разложение

$$CE = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_n + \ldots$$

множества CE в счетный ряд элементов $\mathcal{E}_n$ класса $\leqslant \alpha$ попарно без общих частей.

Установив это, рассмотрим $2n - 1$ элементов класса $\leqslant \alpha$: $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}$; $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_{n-1}$ и $\mathcal{E}_n$. Ясно, что сумма θ_n этих элементов есть также элемент класса $\leqslant \alpha$.

Так как два элемента θ_n и E_n не имеют общей части, то мы можем определить отделяющее множество H_n *либо* класса $< \alpha$, *либо* из базы B_α, которое содержит E_n и не имеет общей точки с θ_n.

Легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = 0$. В самом деле, в противном случае существует точка ξ основной области $\mathcal{J}$, которая принадлежит бесконечному числу множеств $H_1, H_2, \ldots$ Но так как мы имеем полное разложение

$$\mathcal{J} = E_1 + \mathcal{E}_1 + E_2 + \mathcal{E}_2 + \ldots + E_n + \mathcal{E}_n + \ldots,$$

то эта точка ξ принадлежит к некоторому вполне определенному множеству E_i или $\mathcal{E}_i$ и не принадлежит ни к какому дру-

---

$< \alpha + 1$, и это же верно для дополнения CE. Следовательно, мы имеем полное разбиение области $\mathcal{J}$ на счетное множество элементов класса $< \alpha + 1$ и P есть часть этого разбиения. Отсюда следует, что класс P должен быть $\leqslant \alpha$, так как класс $K_{\alpha+1}$ не содержит двусторонних множеств.

гому из составляющих множеств. Значит, как только n превзойдет i, множество H_n уже больше не содержит точки ξ, что противоречит сделанной гипотезе. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = 0$.

Условие достаточно. В самом деле, допустим, что $E_n \subset H_n$ и что $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = 0$, где множество H_n *либо* класса $< \alpha$, *либо* из базы B_α.

Так как E_n есть элемент класса $\leqslant \alpha$, мы можем написать равенство

$$E_n = \lim_{k\to\infty} E_n^{(k)},$$

где множество $E_n^{(k)}$ с двумя индексами будет класса $< \alpha$. Тогда множество S_n, определенное равенством

$$S_n = E_1^{(n)} \cdot H_1 + E_2^{(n)} \cdot H_2 + \ldots + E_n^{(n)} \cdot H_n,$$

будет *либо* класса $< \alpha$, *либо* из базы B_α. Мы докажем, что последовательность множеств

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$$

сходится и имеет своим пределом сумму $E = E_1 + E_2 + \ldots$

Чтобы убедиться в этом, возьмем любую точку x области $\mathcal{J}$. Мы будем различать два случая, смотря по тому, принадлежит ли x или нет ко множеству E.

Первый случай. Точка x принадлежит к вполне определённому элементу E_i; следовательно, она принадлежит к H_i. Ясно, что она принадлежит к $E_i^{(n)}$, как только n превзойдет какое-то значение. Отсюда следует, что точка x принадлежит к S_n при достаточно большом n.

Второй случай. Точка x не принадлежит к E. Так как мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = 0$, то точка x принадлежит ограниченному числу множеств $H_1, H_2, \ldots$ Пусть m есть целое положительное число такое, что x не принадлежит ни одному из множеств $H_{m+1}, H_{m+2} \ldots$ С другой стороны, x не принадлежит ни одному из m множеств $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Так как число m постоянно, то точка x не принадлежит ни одному из m множеств $E_1^{(n)}, E_2^{(n)}, \ldots, E_m^{(n)}$, когда n достаточно велико. Отсюда следует, что точка x не принадлежит к S_n при достаточно большом n.

Таким образом, последовательность множеств $S_1, S_2, \ldots$ сходится и имеет своим пределом E, $E = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$. Так как S_n *либо* класса $< \alpha$, либо из базы B_α, то множество E будет класса $\leqslant \alpha$. Ч. т. д.

Границы применимости операций $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$. Возьмем любой класс K_α классификации Валле-Пуссена и рассмотрим бесконечную последовательность каких-нибудь множеств класса $< \alpha$

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \tag{1}$$

Если мы произведем над этой последовательностью операцию $\overline{\lim}$, мы получим вполне определенное множество, которое мы обозначим через $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} E_n$ и которое совпадает с предельным множеством $\lim\limits_{n \to \infty} E_n$, когда последовательность множеств (1) сходится.

Таким образом, *всякое множество E класса K_α может быть получено при помощи операции $\overline{\lim}$, произведенной один раз над множествами предшествующих классов.*

Если мы спросим себя, каковы множества E класса $> \alpha$, которые могут быть получены таким способом, мы немедленно заметим, что *только элементы класса $K_{\alpha+1}$ могут быть получены при помощи операции $\overline{\lim}$, произведенной над последовательностью множеств класса $< \alpha$.*

В самом деле, мы знаем, что верхний предел $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} E_n$ может быть написан в форме (стр. 28)

$$(E_1 + E_2 + E_3 + \ldots) \cdot (E_2 + E_3 + \ldots) \cdot (E_3 + \ldots) \ldots$$

Каждая скобка есть множество класса $\leqslant \alpha$. Следовательно, если множество $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} E_n$ принадлежит к классу $E_{\alpha+1}$, то оно есть *элемент* этого класса.

Более важным предложением является следующее: *каждый элемент класса $K_{\alpha+1}$ можно получить этим способом.*

Чтобы доказать это, возьмем элемент E класса $K_{\alpha+1}$. Дополнение CE есть сумма элементов класса $\leqslant \alpha$ попарно без общих частей в счетном множестве

$$CE = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$$

Так как E_n есть элемент класса $\leqslant \alpha$, то его дополнение CE_n есть сумма счетного множества элементов класса $< \alpha$ без общих частей

$$CE_n = e_1^{(n)} + e_2^{(n)} + \ldots + e_\nu^{(n)} + \ldots$$

На основании очевидной формулы

$$E = CE_1 \cdot CE_2 \ldots CE_n \ldots$$

мы можем написать

$$E = (e_1^{(1)} + e_2^{(1)} + e_3^{(1)} + \ldots)(e_1^{(2)} + e_2^{(2)} + e_3^{(2)} + \ldots) \ldots$$

Но общая часть конечного числа элементов класса $< \alpha$ есть множество класса $< \alpha$ и, следовательно, сумма счетного множества элементов класса $< \alpha$. Отсюда следует, что мы можем считать каждый элемент $e_i^{(n)}$ из n-й скобки содержащимся в некотором элементе $e_j^{(n-1)}$ предыдущей скобки без того, чтобы множество E изменилось.

В этих условиях каждая точка x из E принадлежит бесконечному множеству элементов $e_\nu^{(n)}$ с двумя индексами. С другой стороны, каждая точка x, не принадлежащая к E, содержится в *ограниченном* числе элементов с двумя индексами $e_\nu^{(n)}$.

Следовательно, если мы перенумеруем все элементы $e_\nu^{(n)}$ с двумя индексами при помощи целых положительных чисел

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots,$$

то *данное множество E будет верхним пределом этой последовательности, образованной из элементов класса $< \alpha$.*

Чтобы изучить границы применимости другой операции, $\underline{\lim}$, достаточно заметить, что равенство $E = \underline{\lim}\, E_n$ может быть записано в виде

$$E = C \overline{\lim_{n \to \infty}}\, CE_n.$$

Следовательно, *при помощи операции* $\underline{\lim}$ *можно получить в классе* $K_{\alpha+1}$ *лишь множества, достижимые снизу, и каждое множество класса* $K_{\alpha+1}$, *достижимое снизу, может быть получено этим способом, отправляясь от множеств класса* $< \alpha$, *достижимых снизу.*

Окончательно, операции $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$, примененные ко множествам класса $< \alpha$, позволяют получить все множества класса $\leqslant \alpha$ и среди множеств класса $K_{\alpha+1}$ первая — все элементы этого класса, а вторая — все множества этого класса, достижимые снизу.

Мы видим, что операции $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$ являются более общими, чем операция $\lim$ (простой переход к пределу), но менее общими, чем двойной переход к пределу $\lim \lim$, который, очевидно, позволяет получить все множества класса $K_{\alpha+1}$.

Множества класса 0 и 1. Исследования Бэра

Предварительные замечания. Бэр создал свои методы и свою классификацию для изучения функций, а не собственно *множеств.* Тем не менее, все идеи Бэра применимы в области множеств, так как принятая нами классификация множеств есть не что иное, как классификация функций $f(x)$, определенных на основной области $\mathcal{J}$ и принимающих только два значения 0 и 1.

Если такая функция $f(x)$ *непрерывна* в каждой точке x_0 области $\mathcal{J}$ относительно $\mathcal{J}$, то она является характеристической функцией некоторого множества E класса 0, согласно принятой классификации функций, *и обратно.* С другой стороны, предел φ (если он существует) характеристических функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ для множеств $E_1, E_2, \ldots$ есть характеристическая функция для множества E, служащего пределом множеств $E_1, E_2, \ldots, E = \lim E_n$.

Отсюда следует, что классы характеристических функций f, определенных на $\mathcal{J}$ и классифицированных по принципам Бэра[1]), совпадают с классами множеств, измеримых B

---

[1]) a priori нисколько не очевидно, что функция $f(x)$, допускающая лишь значения 0 и 1 и класса α в *полной* классификации Бэра должна быть того же класса в классификации, которую мы получаем, распределяя по классам, согласно принципам Бэра, функции, которые могут принимать лишь одно из двух значений 0 и 1.

в принятой классификации. В этих условиях *каждой теореме из классификации функций соответствует теорема о множествах.*

Бэру принадлежит результат чрезвычайной важности в области функций; его можно формулировать так: *для того чтобы функция $f(x)$ была класса 1, необходимо и достаточно, чтобы она имела по крайней мере одну точку непрерывности на всяком совершенном множестве.*

На основании сказанного выше, мы получим соответствующее предложение о множествах, если возьмем характеристические функции класса $\leqslant 1$, определенные на основной области $\mathcal{J}$. В этом случае, по определению, *совершенным на* $\mathcal{J}$ будет такое множество точек $\mathcal{J}$, которое не имеет ни одной изолированной точки и содержит каждую точку из $\mathcal{J}$, в соседстве с которой имеется бесконечное множество точек этого множества.

Другой общий результат Бэра, относящийся ко всем функциям его классификации, следующий: *для того чтобы некоторая функция принадлежала к классификации, необходимо, чтобы на каждом совершенном множестве P она отличалась от некоторой функции класса $\leqslant 1$, определенной на P лишь в точках некоторого множества первой категории на P.*

Чтобы получить соответствующее свойство множеств, т. е. свойство, которое принадлежало бы всем множествам, измеримым B, достаточно перенести понятие множества первой категории на P, заменяя совершенные множества на евклидовой прямой совершенными множествами на $\mathcal{J}$. К тому же это обобщение понятия категории мгновенно: не надо ничего менять в обычных определениях [1]).

Что же касается функций высших классов, то Бэр ограничился классом 3: он дал простое построение функции класса 3. Пример Бэра следующий: *если разложить в непрерывную дробь иррациональное число x, заключенное*

---

[1]) Это обобщение было сделано самим Бэром. См. его мемуар «Sur la représentation des fonctions discontinues», часть вторая (Acta Math., т. 32, стр. 116).

между 0 *и* 1

$$x = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \dotsb}}},$$

то функция $f(x)$, *равная* 1, *если неполные частные* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *неограниченно возрастают, и* 0 *в противном случае, есть в точности функция класса* 3.

Множество E точек x, для которых α_n неограниченно возрастает, есть как раз множество класса 3.

Таковы результаты исследований Бэра. Если мы постараемся проанализировать характер этих исследований, то одна вещь не может не поразить нас: Бэр никогда не доказывает существование функции того или иного класса методом диагонали (наложением на континуум). Он всегда старается доказать существование функций некоторого класса *непосредственным построением*. А так как этот метод требует чрезвычайных усилий, отсутствие конструктивных примеров функций высших классов вполне естественно.

Напротив, пользование методом диагонали (наложение на континуум) очень легко и приводит к немедленным результатам. Тем не менее, так как в этом методе употребляют наложение на континуум *всех* функций (или множеств) классов, предшествующих рассматриваемому классу, то нужно еще хорошо изучить природу примеров, получаемых этим методом, и сравнить их с результатами конструктивного метода Бэра [1]).

Важно заметить, что теорема Бэра о функциях класса 1 отличается такой красотой и настолько удобна для приложений, что ее можно считать за идеал для предложений теории функций. Поэтому нет недостатка в попытках получить обобщение этой теоремы для высших классов. Среди этих попыток мы должны цитировать две главные, которыми мы обязаны Лебегу [2]) и Валле-Пуссену [3]).

---

[1]) См. мою статью «Les analogies entre les ensembles mesurables B et les ensembles analytiques» Fund. Math. т. XVI, 1930.

[2]) «Sur les fonctions représentables analytiquement», стр. 191. Мы слегка изменили формулировку определения Лебега, введя понятие элемента.

[3]) Ch. de la Vallée-Poussin «Intégrale de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire, гл. VIII, стр. 144.

Лебег вводит понятие непрерывности (α).

Функция f называется *непрерывной* (α) *на совершенном множестве* P *в точке* x *из* P, если для каждого положительного числа ε можно найти такую порцию P, содержащую x, которая является суммой счетного множества элементов класса $\leqslant \alpha$, на каждом из которых f постоянна с точностью до ε, причем все эти элементы, *кроме одного, содержащего* x, нигде не плотны на P.

Установив это определение, можно, согласно Лебегу, выразить следующим образом необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $f(x)$ была класса $\leqslant \alpha$: *необходимо и достаточно, чтобы* $f(x)$ *была непрерывна* (α) *по крайней мере в одной точке на каждом совершенном множестве.*

С другой стороны, Валле-Пуссен ввел следующие понятия, при помощи которых он приходит к искомому обобщению теоремы Бэра:

Бесконечная последовательность функций f_n называется сходящейся к f *с точностью до* ε *на множестве* E, если в каждой точке E верхний и нижний пределы f_n для $n \to \infty$ $\overline{\lim} f_n$ и $\underline{\lim} f_n$ равны f с точностью до ε.

Функция f *есть функция класса* α *на* E *с точностью до* ε, если существует последовательность функций f_n класса $< \alpha$, сходящаяся к f на E с точностью до ε. f есть функция *класса* α *с точностью до* ε *на* E *в некоторой точке* x, если существует порция E, содержащая x, на которой x класса α с точностью до ε.

Вот какова формулировка Валле-Пуссена: *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция* f *была класса* $\leqslant \alpha$, *состоит в том, чтобы для всякого положительного числа* ε *и для всякого совершенного множества* P *можно было найти точку из* P, *в которой* f *на* P *класса* α *с точностью до* ε.

В дальнейшем мы внимательно изучим теорему Бэра о множествах класса 1, чтобы найти аналогичное предложение для *множеств* высших классов, возможно более близкое к теореме Бэра.

Множество класса 0. Сначала мы рассмотрим множества начального класса K_0.

По самому определению, в класс 0 входит всякое множество точек E такое, что само E и его дополнение CE являются суммами счетного множества порций области $\mathcal{J}$ попарно без общих точек.

Мы видели (стр. 24), что для получения заранее заданного множества E класса 0 достаточно взять на прямой $X'X$[1]) замкнутое множество F, составленное из *рациональных* точек, и заставить войти в E порции основной области $\mathcal{J}$, смежные к F так, чтобы оставшиеся порции $\mathcal{J}$, смежные к E, вошли в дополнение CE, причем две соседние порции принадлежат двум разным множествам.

Ясно, что замкнутое множество F, обладающее этим свойством, *единственно*.

Пусть

$$F,\ F',\ F'',\ \ldots,\ F^{(\omega)},\ \ldots,\ F^{(\beta)},\ \ldots$$

— последовательные производные множества от F.

Так как F счетно, то существует вполне определенное число α, конечное или трансфинит второго класса такое, что производное множество $F^{(\alpha)}$ пусто, тогда как каждое предшествующее производное множество $F^{(\beta)}$, $\beta < \alpha$ эффективно содержит точки.

Таким образом, *каждому множеству E класса* 0 *соответствует вполне определенное число α конечное или трансфинит второго класса.*

Мы видим, что это число α может быть как угодно «большим»[2]).

Было бы чрезвычайно интересно уметь аналогичным способом привести в соответствие каждому *двустороннему* множеству E класса K_α второго рода некоторое конечное или трансфинитное число β.

Теорема Бэра в приложении к множествам класса 1. Мы теперь изучим структуру общего множества точек класса 1. Прежде всего мы применим теорему Бэра о *функциях*

---

[1]) Прямая $X'X$ здесь евклидова. (*Прим. ред.*)

[2]) Это значит, что какова бы ни была счетная вполне упорядоченная последовательность, можно эффективно образовать множество E класса 0 такое, чтобы соответствующая последовательность производных множества F, эффективно содержащих точки, была бы подобна данной вполне упорядоченной последовательности.

класса 1 к случаю характеристической функции, определенной на $\mathcal{J}$; вот что мы получим:

Для того чтобы множество точек E было класса $\leqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было множество P, совершенное относительно $\mathcal{J}$, существовала порция P, целиком содержащаяся или в E, или в его дополнении CE.

Важно заметить, что это характеристическое свойство множеств класса $\leqslant 1$ выведено из теоремы Бэра о *функциях* класса 1, но *не из определения множества класса* 1.

Мы выведем это характеристическое свойство непосредственно из определения множества класса 1.

Условие Бэра необходимо. В самом деле, пусть E — множество класса $\leqslant 1$, лежащее в основной области $\mathcal{J}$.

Пусть P есть произвольное совершенное (относительно $\mathcal{J}$) множество, лежащее в $\mathcal{J}$.

На основании общего предложения о структуре множества класса α (стр. 71), E и его дополнение CE являются оба суммами счетного множества элементов класса $\leqslant \alpha$ попарно непересекающихся. С другой стороны, элемент класса 1 есть не что иное, как множество замкнутое (относительно $\mathcal{J}$), так как дополнение к элементу класса 1 есть сумма счетного множества порций $\mathcal{J}$.

Таким образом, мы имеем разложение

$$\mathcal{J} = \varepsilon_1 + \eta_1 + \varepsilon_2 + \eta_2 + \ldots + \varepsilon_n + \eta_n + \ldots,$$

где ε_n и η_n суть замкнутые множества.

Хотя бы одно из ε_n или η_n должно быть плотным на P; следовательно, оно содержит порцию P. Но это и есть свойство Бэра.

Условие достаточно. Пусть E есть множество точек, обладающее указанным свойством.

В силу этого свойства, какова бы ни была порция (a, b) области $\mathcal{J}$, найдется другая порция (a', b'), содержащаяся в (a, b) и заключенная целиком *либо* в E, *либо* в CE.

Отсюда следует, что существует замкнутое неплотное множество F_1, каждая смежная порция к которому принадлежит целиком *либо* к E, *либо* к CE [1]).

---

[1]) Мы прибавим, если это нужно, некоторые рациональные точки к F, чтобы эта формулировка оправдалась.

Заметив это, обозначим через P_1 наибольшее совершенное множество, содержащееся в F_1. Предыдущее рассуждение, произведенное над основной областью $\mathcal{J}$, прекрасно применяется к случаю совершенного множества P_1 и, таким образом, мы имеем новое замкнутое множество F_2, содержащееся в P_1, неплотное на P_1 и такое, что каждая порция P_1, смежная к F_2, принадлежит *либо* к E, *либо* к CE.

Продолжая таким же образом, мы получим вполне упорядоченную последовательность

$$\mathcal{J} \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_\omega \supset \ldots \supset P_\beta \supset \ldots$$

совершенных множеств таких, что из любых двух множеств следующее содержится в предыдущем и *неплотно* на нем [1]).

Отсюда вытекает, что эта последовательность должна быть счетной. Значит, мы придем к пустому множеству.

С другой стороны, из построения совершенных множеств P_β следует, что каждое P_β есть наибольшее совершенное множество, содержащееся в замкнутом множестве F_β, и что если β первого рода $\beta = \beta^* + 1$, то *каждая порция P_β, смежная к F_β, заключена полностью либо в E, либо в CE.*

Отсюда мы заключаем, что оба множества E и CE являются суммами конечного или счетного числа отдельных точек и порций совершенных множеств, попарно неперекрывающихся. Но каждая отдельно взятая точка и каждая порция совершенного множества есть элемент класса 1 (или порция $\mathcal{J}$). Следовательно, *мы получаем полное разбиение основной области $\mathcal{J}$ на конечное или счетное число элементов класса* 1 *и множество E есть часть этого разбиения.*

На основании общей теоремы о структуре множества класса α (стр. 74), множество E будет класса $\leqslant 1$. Ч. т. д.

Свойство Бэра для всех множеств, измеримых *B*. Мы видели, что каждое множество E класса 1, так же как и его дополнение CE, есть сумма счетного множества *отдельных точек* и *совершенных множеств.*

Так как общая часть двух совершенных множеств есть замкнутое множество и так как всякое замкнутое множество

---

[1]) Совершенное множество P_β содержится в замкнутом множестве F_β. Если индекс β второго рода, то F_β определяется как общая часть для всех $F_{\beta'}$ (или для всех $P_{\beta'}$), предшествующих β, $\beta' < \beta$.

есть сумма совершенного множества и счетного числа отдельных точек, мы заключаем, что *точки множества E класса* 1, *содержащиеся в совершенном множестве P, а также точки дополнения CE образуют на P сумму счетного числа отдельных точек и совершенных множеств.*

Свойство Бэра теперь может быть формулировано следующим образом:

Всякое множество, измеримое B, а также и его дополнение являются на каждом совершенном множестве P суммами счетного числа порций P, если пренебрегать множеством первой категории по отношению к P.

Другими словами, каковы бы ни были множество E, измеримое B, и совершенное множество P, можно определить на P замкнутое множество F, неплотное на P и такое, что каждая порция P, смежная к F, содержится либо в E, либо в CE, если пренебрегать точками множества первой категории по отношению к P.

Сравнивая эту форму свойства Бэра с указанным свойством множеств класса 1, мы придадим свойству Бэра следующую форму: всякое множество E, измеримое B, на всяком совершенном множестве P отличается от множества E_1 первого класса, лежащего на P, лишь в точках некоторого множества первой категории по отношению к P.

В этой форме рассматриваемое свойство есть не что иное, как свойство Бэра для функций $f(x)$, определенных на $\mathcal{J}$ и допускающих лишь два значения 0 и 1. Следовательно, можно вывести свойство Бэра, касающееся *множеств*, из того, которое касается *функций*.

Чтобы доказать его непосредственно, достаточно заметить, что если каждое из множеств E_1, E_2, ..., E_n, ... обладает свойством Бэра на совершенном множестве P, то их сумма и общая часть также обладают свойством Бэра на P.

В самом деле, обозначим через S_n сумму порций P, отличающуюся от E_n лишь в точках некоторого множества e_n первой категории по отношению к P; множество e_n образовано из точек E_n, не принадлежащих к S_n, и из точек S_n, не принадлежащих к E_n.

Обозначим через S сумму множеств S_n. Очевидно, что S есть множество класса $\leqslant 1$, отличающееся от суммы

$E_1 + E_2 + \ldots$ лишь в точках множества $e_1 + e_2 + \ldots$ первой категории по отношению к P.

Следовательно, свойство Бэра инвариантно по отношению к операции (S): *составления суммы.*

Но, по самому определению, свойство Бэра инвариантно относительно операции (C): *взятия дополнения.*

Так как всякое множество, измеримое B, может быть образовано при помощи этих двух операций, отправляясь от порций $\mathcal{J}$ (стр. 43), то свойство Бэра принадлежит всякому множеству, измеримому B [1]).

Конструктивное существование множеств 1, 2, 3 и 4-го классов

Канонические элементы класса 1. Мы назовем *каноническими* элементы данного класса K_α, *которые обладают некоторым достаточно простым свойством* и такие, что каждое множество класса K_α можно получить, образуя сумму счетного множества канонических элементов [2]).

Мы рассмотрим канонические элементы первых классов классификации Бэра — Валле-Пуссена.

Порция фундаментальной области $\mathcal{J}$ может быть рассматриваема как *канонический элемент* класса 0.

В первом классе каноническими элементами являются: *точка* и *совершенное множество*, нигде не плотное на $\mathcal{J}$.

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что элемент класса K_1 совпадает с замкнутым множеством (относительно $\mathcal{J}$). Действительно, если E — элемент класса K_1, то его дополнение CE достижимо снизу, следовательно, есть сумма порций $\mathcal{J}$; отсюда мы заключаем, что E — замкнуто.

Обратно, каждое замкнутое множество F есть, очевидно, элемент класса K_1.

---

[1]) См. также Сообщение Польской Академии Nikodym «Sur la condition de Baire», Bull. Ac. Pol., 1929, стр. 591.

[2]) Данное определение канонического элемента неопределенно, так как мы не указали, в чем заключается это достаточно простое свойство. Мы не умеем этого сделать в общем случае. Было бы желательно иметь в каждом классе конечное число родов канонических элементов так, чтобы элементы одного рода были между собой гомеоморфны [6].

Так как каждое несчетное замкнутое множество есть сумма счетного множества точек и совершенного множества, то ясно, что каждый элемент класса K_1 состоит из порций области $\mathcal{J}$ отдельных точек в счетном числе и совершенного множества нигде не плотного на $\mathcal{J}$. Следовательно, каноническими элементами класса K_1 являются точки и совершенные, нигде не плотные множества.

Канонические элементы класса 2. В классе K_2 есть канонические элементы двух родов:

1° *Можно получить канонический элемент класса* 2, *выбрасывая из совершенного множества P счетное множество точек, всюду плотное на P.*

2° *Можно получить канонический элемент класса* 2, *выбрасывая из совершенного множества P счетное множество нигде не плотных на P совершенных множеств попарно без общих точек, сумма которых всюду плотна на P.*

Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что каждое множество E класса 2 есть сумма счетного множества элементов этих двух родов и множеств класса $\leqslant 1$. Так как каждое множество класса 2 есть сумма счетного множества элементов класса K_2, то достаточно ограничиться рассмотрением элементов [7].

Пусть E — элемент класса 2. Выбросим из $\mathcal{J}$ все порции, на которых E класса $\leqslant 1$. Мы получим совершенное множество P_1, каждая порция которого содержит часть множества E, образующую элемент класса 2.

Я утверждаю теперь, что между порциями P_1 найдется хотя бы одна такая, что часть E, ей принадлежащая, есть *канонический* элемент.

В самом деле, дополнение CE состоит из порций, отдельных точек и совершенных множеств в счетном числе. Но CE всюду плотно на P_1, так как иначе существовала бы порция области $\mathcal{J}$, содержащая точки P_1 и определяющая часть E класса $\leqslant 1$, что противоречит определению P.

С другой стороны, CE очевидно первой категории на P_1, так как в противном случае существовала бы порция P_1, не содержащая точек E, что также противоречит условию. Следовательно, среди порций P_1 есть порции, которые определяют канонические части E. Ясно, что эти порции образуют множество, всюду плотное на P_1, так что, выбрасывая эти порции из P_1, мы получим замкнутое множество F_2, нигде не плотное на P_1.

Обозначим через P_2 наибольшее совершенное множество, содержащееся в F_2.

Легко видеть, что, поступая так же с множеством P_2, мы получим новое совершенное множество P_3, содержащееся в P_2 и нигде не плотное на нем, *и так далее.*

Мы построим последовательность совершенных множеств

$$\mathcal{J},\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_\omega,\ \ldots,\ P_\beta,\ \ldots,$$

каждое следующее множество содержится в предыдущем и *нигде не плотно* на нем. Следовательно, существует число α конечное, или трансфинитное второго класса, такое, что множество P_α пусто.

Отсюда мы заключаем, что данное множество E разлагается на счетную сумму множеств класса $\leqslant 1$ и элементов класса α обоих указанных родов. Ч. т. д.

До сих пор мы предполагали установленным существование множеств класса 2. Нам остается восполнить этот пробел.

Пусть E — множество одного из двух рассмотренных родов. В силу самой конструкции E множество E, так же как и его дополнение CE, всюду плотно на совершенном множестве P.

Я утверждаю теперь, что E есть множество класса 2. В самом деле, если бы класс E был меньше, чем 2, то множество E обладало бы свойством множеств класса $\leqslant 1$. Значит, существовала бы порция P, принадлежащая целиком либо к E, либо к CE; но это противоречит тому, что E и CE оба всюду плотны на P.

Итак, множество E *строго класса* 2.

Заметим, наконец, что каждое совершенное нигде не плотное множество строго класса 1. Действительно, такое множество не может быть класса 0, так как не содержит никакой порции $\mathcal{J}$.

Конструктивное доказательство Бэра существования элементов класса 3. Основной целью двух мемуаров Бэра «Sur la représentation des fonctions discontinues» (первый мемуар в Acta. Math., т. 30, 1905; второй мемуар там же, т. 32, 1909) является строгое построение *элемента класса* 3.

Наиболее важная часть первого мемуара посвящена этому вопросу. И во втором мемуаре Бэр возвращается к этому построению с более общей точки зрения.

Принципы, изложенные нами выше, позволяют нам без затруднения изучить результаты Бэра о конструктивном существовании элементов класса 3.

Прежде всего уточним условия существования элемента класса 3. Предположим, что существует элемент E класса 3. Мы видели (стр. 78), что E может быть написано в виде:

$$E = (e_1^{(1)} + e_2^{(1)} + e_3^{(1)} + \ldots) \cdot (e_1^{(2)} + e_2^{(2)} + e_3^{(2)} + \ldots) \ldots, \quad (1)$$

где $e_n^{(k)}$ — элементы класса $\leqslant 1$. При этом мы можем предположить, что элементы, стоящие в одной скобке, не имеют попарно общих точек и что каждый элемент $e_n^{(k)}$ k-й скобки содержится в некотором элементе $e_n^{(k-1)}$ предшествующей скобки.

В силу того, что мы говорили о канонических элементах класса 0 и 1, мы можем предположить, что элементы $e_n^{(k)}$ являются: *либо* порциями фундаментальной области $\mathcal{J}$, *либо* отдельными точками, *либо* совершенными нигде не плотными множествами.

Каждый элемент класса 3, *если он существует*, может быть получен таким образом. Таков вывод из предшествующего текста.

Открытие Бэра заключается в том, что он дал достаточное условие для того, чтобы множество E, определенное равенством (1), *было в точности класса* 3.

Вот условия Бэра:

1° Множества $e_n^{(k)}$ совершенные (относительно $\mathcal{J}$).

2° Каждое множество $e_n^{(k)}$, содержащееся в $e_m^{(k-1)}$, нигде не плотно на $e_m^{(k-1)}$.

3° Множества $e_n^{(k)}$, содержащиеся в фиксированном множестве $e_m^{(k-1)}$, образуют множество, всюду плотное на $e_m^{(k-1)}$.

В этих условиях Бэр доказывает, что E есть множество строго класса 3.

Для доказательства этого результата Бэра удобно изменить обозначения.

Обозначим через P_{i_1} ($i_1 = 1, 2, 3, \ldots$) все множества $e_n^{(1)}$ первой скобки равенства (1). Пусть элементы $(k-1)$-й скобки обозначены через $P_{i_1 \ldots i_{k-1}}$; обозначим через $P_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k}$, где индекс i_k принимает значения 1, 2, 3, ..., все элементы k-й скобки, *содержащиеся* в $P_{i_1 \ldots i_{k-1}}$.

При таких обозначениях все элементы k-й скобки суть множества $P_{i_1 \ldots i_k}$ с k индексами, и каждое множество $P_{i_1 \ldots i_k}$ с k индексами есть элемент k-й скобки. Чтобы получить все элементы $(k+1)$-й скобки, содержащиеся в $P_{i_1 \ldots i_k}$, достаточно добавить новый индекс i_{k+1} так, чтобы получился символ с $k+1$ индексами, и заставить i_{k+1} пробегать значения 1, 2, 3, ...

После этого обозначим через $Q_{i_1 \ldots i_{k-1}}$ сумму всех множеств $P_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k}$, $i_k = 1, 2, 3, \ldots$, у которых $k-1$ первых индексов фиксированы, и через Q_k — сумму всех множеств $P_{i_1 \ldots i_k}$ с k индексами.

Вот формулировка Бэра: *если* 1° *множества* $P_{i_1 \ldots i_k}$ *совершенные относительно* $\mathcal{J}$ *и, при фиксированном* k, *не имеют попарно общих точек*; 2° *множество* $P_{i_1 \ldots i_k i_{k+1}}$ *содержится в* $P_{i_1 \ldots i_k}$ *и нигде не плотно на этом множестве;* 3° *множество* $Q_{i_1 \ldots i_k}$ *всюду плотно на* $P_{i_1 \ldots i_k}$, *то общая часть*

$$E = Q_1 \cdot Q_2 \ldots Q_k \ldots$$

есть множество в точности класса 3.

Чтобы это доказать, обозначим через R_0 множество точек области $\mathcal{J}$, не принадлежащих ни одному из множеств P_{i_1}, $i = 1, 2, 3, \ldots$, и через $R_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ множество-разность $P_{i_1 \ldots i_k} - Q_{i_1 \ldots i_k}$. Легко видеть, что R_0 и $R_{i_1 \ldots i_k}$ являются *каноническими элементами класса* 2 [1]) и что

$$CE = R_0 + \sum R_{i_1 \ldots i_k},$$

[1]) Мы предполагаем, что сумма Q_1 множеств P_{i_1}, $i_1 = 1, 2, 3, \ldots$, всюду плотна на $\mathcal{J}$. При этих условиях R_0 есть в точности канонический элемент класса 2.

где индексы $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и само k принимают значения 1, 2, 3, ... независимо один от другого.

Так как канонические элементы R_0 и $R_{i_1 \ldots i_k}$ не имеют попарно общих точек, то мы можем применить критерий неповышения класса, ранее нами полученный (стр. 75). Мы заключаем, что *если множество E есть множество класса $\leqslant 2$, то можно заключить каждый элемент $R_{i_1 \ldots i_k}$ в множестве $H_{i_1 \ldots i_k}$ класса $\leqslant 1$ так, что $\lim H_{i_1 \ldots i_k} = 0$, когда один из индексов $i_1, \ldots, i_k$ или k бесконечно растет.*

Покажем, что при этих условиях мы придем к противоречию. Прежде всего, так как множество H_0, содержащее R_0, есть множество класса $\leqslant 1$ и всюду плотно на $\mathcal{J}$, то существует наверняка порция δ_0 фундаментальной области $\mathcal{J}$, содержащаяся целиком в H_0.

Заметив это, перенумеруем все *рациональные* точки при помощи целых положительных чисел. Пусть $r_1, r_2, r_3, \ldots$ — полученная последовательность. Так как порция δ_0 фиксирована и так как множество Q_1 всюду плотно на $\mathcal{J}$, то существует множество $P_{i_1^0}$, имеющее точки в δ_0. С другой стороны, множество $H_{i_1^0}$ всюду плотно на $P_{i_1^0}$, так как содержит канонический элемент $R_{i_1^0}$, всюду плотный на $P_{i_1^0}$. Так как $H_{i_1^0}$ класса $\leqslant 1$, то можно определить порцию δ_1 области $\mathcal{J}$, содержащуюся в δ_0 и не имеющую точки r_1 в качестве своей предельной точки такую, что порция $P_{i_1^0}$, которую она определяет, содержится целиком в $H_{i_1^0}$.

Предположим вообще, что мы нашли порцию δ_{k-1} области $\mathcal{J}$, для которой точки $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$ не являются предельными точками, и множество $P_{i_1^0 \ldots i_{k-1}^0}$ такое, что его порция, которую определяет δ_{k-1}, целиком содержится в $H_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_{k-1}^0}$. Так как множество $Q_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_{k-1}^0}$ всюду плотно на $P_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_{k-1}^0}$, то существует множество $P_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_{k-1}^0 i_k^0}$, имеющее точки в δ_{k-1}. С другой стороны, множество $H_{i_1^0 \ldots i_k^0}$

всюду плотно на $P_{i_1^0 \dots i_k^0}$, так как содержит канонический элемент, всюду плотный на $P_{i_1^0 \dots i_k^0}$. Так как $H_{i_1^0 i_2^0 \dots i_k^0}$ класса $\leqslant 1$, то можно найти порцию δ_k области $\mathcal{G}$, содержащуюся в δ_{k-1}, для которой точка r_k не является предельной, такую, что порция $P_{i_1^0 i_2^0 \dots i_k^0}$, которую определяет δ_k, содержится целиком в $H_{i_1^0 i_2^0 \dots i_k^0}$.

Легко видеть, что, продолжая таким образом, мы построим последовательность порций области $\mathcal{G}$:

$$\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots$$

такую, что каждая последующая содержится в предыдущей и для порции δ_k рациональные точки $r_1, r_2, \dots, r_k$ не являются предельными точками.

Отсюда следует, что длины δ_k стремятся к нулю, когда k бесконечно возрастает. Следовательно, существует одна и только одна точка ξ, общая всем порциям δ_k. Эта точка ξ заведомо *иррациональная* в силу свойства порций δ_k.

Так как множество $P_{i_1^0 i_2^0 \dots i_k^0}$ содержится в множестве $P_{i_1^0 i_2^0 \dots i_h^0}$, где $h < k$, то, если k достаточно велико, порция δ_k области $\mathcal{G}$ содержит точки множества $P_{i_1^0 \dots i_\nu^0}$, где ν фиксировано. Но множества $P_{i_1^0 \dots i_k^0}$ совершенные. Отсюда следует, что точка ξ принадлежит всем множествам

$$P_{i^0}, P_{i_1^0 i_2^0}, \dots, P_{i_1^0 i_2^0 \dots i_k^0} \dots$$

и, следовательно, всем множествам

$$H_{i_1^0}, H_{i_1^0 i_2^0}, \dots, H_{i_1^0 i_2^0 \dots i_k^0} \dots,$$

что невозможно, так как, по предположению, мы имеем:

$$\lim H_{i_1^0 i_2^0 \dots i_k^0} = 0.$$

Итак, мы пришли к противоречию и, следовательно, *множество E есть элемент класса* 3. Ч. т. д.

Назовем элементами Бэра элементы класса 3, которые построены по приведенному выше правилу. Мы не касаемся вопроса, являются ли элементы Бэра единственными в классе 3, которые заслуживают названия *канонических* элементов.

В силу крайней простоты применения правила Бэра можно дать *арифметический* пример элемента 3. Бэр сам нашел такой пример [1]).

Положим, вместе с Бэром,

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{\quad + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}} = (a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots),$$

где каждое a_n — целое положительное число.

Обозначим через $p^{(n)}(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_h)$ множество всех иррациональных точек сегмента $[0,1]$, которые изображаются непрерывными дробями, начинающимися с $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_h)$ и у которых остальные неполные частные все больше, чем n.

Легко доказывается, что $p^{(n)}(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_h)$ — совершенное множество (относительно $\mathcal{J}$), нигде не плотное на $\mathcal{J}$.

Множество $p^{(n)}$ называется *нормальным*, если $h = n$ или если $h > n$ и если $a_h \leqslant n$.

При фиксированном n все нормальные множества попарно не имеют общих точек. Легко видеть, что их сумма Q_n

$$Q_n = \sum p^{(n)},$$

есть *множество всех иррациональных точек сегмента* $[0,1]$, *у которых все неполные частные, начиная с некоторого ранга, больше, чем* n.

Заметив это, обозначим через P_{i_1} $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$ все нормальные множества $p^{(1)}$, перенумеровав их некоторым образом. Так как два нормальных множества $p^{(n-1)}$ и $p^{(n)}$ либо не имеют общих точек, либо $p^{(n)}$ содержится в $p^{(n-1)}$, то мы

---

[1]) См. R. Baire, «Sur la représentation des fonctions discontinues» (Acta Math., т. 30, 1905, стр. 34—47).

можем обозначить через $P_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k}$ все нормальные множества, содержащиеся в $P_{i_1 \ldots i_{k-1}}$ $(i_k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Легко показать, что $P_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k}$ нигде не плотно на $P_{i_1 \ldots i_k}$ и что сумма $Q_{i_1 \ldots i_{k-1}}$ множеств $P_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k}$ $(i_k = 1, 2, 3, \ldots)$ всюду плотна на $P_{i_1 \ldots i_k}$ [1]).

Итак, множества $P_{i_1 \ldots i_k}$ удовлетворяют всем условиям правила Бэра. Так как это правило здесь применимо, мы заключаем, что общая часть

$$E = Q_1 \cdot Q_2 \ldots Q_n \ldots$$

есть элемент класса 3.

Можно немедленно указать очень изящное характеристическое свойство точек E.

Множество E есть множество всех иррациональных точек сегмента [0,1], *у которых неполные частные номера n бесконечно возрастают вместе с n.*

Это свойство точек E можно получить, рассматривая характеристическое свойство множеств Q_n.

Итак, *можно назвать элемент класса* 3, *указав некоторое его арифметическое свойство.*

Исследования Л. В. Келдыш о конструктивном существовании элемента класса 4. Можно ли продолжить изыскания Бэра за пределы класса 3? Мы приведем здесь конструктивное доказательство существования элемента класса 4, принадлежащее Л. В. Келдыш. Этот результат является наиболее естественным в направлении, открытом Бэром.

Вот ход рассуждений Л. В. Келдыш: строится сначала счетная последовательность элементов Бэра (класса 3) $e_1, e_2, \ldots \ldots e_n, \ldots$ попарно без общих точек, выбранных соответствующим образом, и доказывается затем, что сумма $e_1 + e_2 + \ldots \ldots + e_n + \ldots$ не может быть класса меньше, чем 4. Этот важный факт устанавливается применением критерия неповышения класса (стр. 75): элемент e_n заключается в множество H_n класса $\leqslant 2$ и доказывается, что никогда не имеет места $\lim H_n \equiv 0$, каков бы ни был выбор H_n.

---

[1]) Подробности см. в цитированном мемуаре Бэра (Acta Math., т. 30, 1905, стр. 39).

Все сводится к выбору элементов Бэра $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Существенная роль в этой конструкции принадлежит элементам класса 2, и мы начнем с доказательства следующей леммы:

Лемма I. *Если элемент Бэра E, заданный определяющей системой $P_{i_1 \ldots i_n}$, содержится в счетной сумме канонических элементов класса $\leqslant 2$, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots$, то существует такое θ_m и такая порция π некоторого образующего множества $P_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_n^0}$, что θ_m — второй категории на каждой порции π, так же как на каждой порции любого определяющего множества, содержащегося в π.*

Предположим, наоборот, что такого θ_m не существует. Это значит, что существует порция π_1 определяющего множества $P_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_k^0}$ такая, что θ_1 не содержит точек π_1. Так как θ_2 не удовлетворяет условиям леммы, то существует в π_1 порция π_2 определяющего множества $P_{i_1^0 \ldots i_{n_1}^0 \ldots i_{n_2}^0}$ такая, что θ_2 не содержит точек π_2. Существует также в π_2 порция π_3 определяющего множества $P_{i_1^0 \ldots i_{n_1}^0 \ldots i_{n_2}^0 \ldots i_{n_3}^0}$ такая, что θ_3 не содержит точек π_3. Продолжая таким образом до бесконечности, мы получим неограниченную последовательность порций $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu, \ldots$ каждая из которых содержится в предшествующей и такую, что множество π_ν не содержит точек ν множеств $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu$. Пусть ξ — точка, принадлежащая всем $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu, \ldots$ Эта точка принадлежит, очевидно, элементу Бэра E и, так как она не принадлежит ни одному из множеств $\theta_1, \theta_2, \ldots$, то мы пришли к противоречию. Ч. т. д.

Введем теперь следующее определение. Пусть θ — канонический элемент класса 2, который получается выбрасыванием из совершенного множества P счетного множества совершенных множеств $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ попарно без общих точек, каждое из которых нигде не плотно на P и сумма которых всюду плотна на P. Пусть E — элемент Бэра класса 3, содержащийся в θ и всюду плотный на P, заданный определяющей системой $P_{i_1 i_2 \ldots i_n}$.

Определение. Мы будем говорить, что E есть элемент Бэра, *плотный на* θ, если каждая порция произвольного определяющего множества $P_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ содержит порцию какого-либо совершенного множества P_n.

Установив это определение, мы докажем следующее предложение:

Лемма II. *Каждый канонический элемент* θ *класса* 2 *содержит элемент Бэра класса* 3, *плотный на* θ.

Прежде всего мы заметим, что лемма будет доказана, если мы сумеем построить совершенное множество π, содержащееся в P, нигде не плотное на P и такое, что каждая порция π содержит порцию некоторого множества P_n, причем эта порция нигде не плотна на π.

В самом деле, предположим, что мы построили такое множество π; обозначим его π_1 и в смежных интервалах к π_1 возьмем совершенные множества $\pi_2, \pi_3, \ldots$, каждое из которых обладает тем же свойством. Сумму $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n + \ldots$ можно выбрать всюду плотной на P и первой категории на P.

Эти множества π_i будут *определяющими множествами с одним индексом* элемента Бэра E, который мы получим.

Поступая таким же образом для множеств π_i, осуществляя для каждого из них те же операции, которые мы производили над множеством P, мы построим *определяющие множества* $\pi_{i_1 1}, \pi_{i_1 2}, \ldots, \pi_{i_1 i_2}, \ldots$ *с двумя индексами* для элемента E, и так далее. Можно, очевидно, предположить, что множества $\pi_{i_1 i_2}$ с двумя индексами не содержат точек P_1, так как P_1 нигде не плотно на каждом π_{i_1}. Таким же образом можно предположить, что множества $\pi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ с k индексами не содержат точек множества P_{k-1}. Легко видеть, что элемент Бэра E, заданный определяющей системой $\pi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, содержится в θ, так как он не может содержать точек множеств $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ Следовательно, элемент Бэра E, таким образом определенный, плотен на θ.

Все сводится к построению совершенного множества π, обладающего указанным свойством.

Для этого возьмем в множестве P точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, не принадлежащие ни одному P_k и образующие счетное, всюду плотное на P множество. Рассмотрим множество P_1 и выбросим из P порцию σ_1, смежную к P_1 и содержащую точку ξ_1.

Пробегая последовательность P_2, P_3, ..., P_n, ..., мы найдем множество, некоторая порция которого принадлежит к $P-\sigma_1$; пусть P_{ν_2} — первое такое множество. Выбросим из P порцию σ_2 множества P, смежную к $P_1+P_{\nu_2}$ и содержащую точку ξ_2. Пробегая последовательность P_{ν_2+1}, P_{ν_2+2}, ..., P_n, ..., мы найдем множество, некоторая порция которого принадлежит к $P-\sigma_1-\sigma_2$; пусть P_{ν_3} — первое из таких множеств. Выбросим из P порцию σ_3 множества P, смежную к $P_1+P_{\nu_2}+P_{\nu_3}$ и содержащую точку ξ_3 и так далее.

Продолжая таким образом до бесконечности, мы построим бесконечную последовательность порций σ_1, σ_2, ..., σ_n, ... множества P. Множество π точек P, которое получается выбрасыванием из P всех σ_i, есть совершенное множество, и легко видеть, что π обладает требуемыми свойствами. Ч. т. д.

Перейдем теперь к конструкции элемента класса 4.

Возьмем сначала в порции (0,1) области $\mathcal{J}$ элемент Бэра E_0, всюду плотный на этой порции; пусть $P^0_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ — определяющие множества для E_0. Если мы выбросим из порции (0,1) элемент E_0, то оставшаяся часть разбивается на счетное множество канонических элементов класса 2, которые мы обозначим через $\theta^{(\nu_1)}$, $\nu_1=1, 2, \ldots$

Напомним, что каждое $\theta^{(\nu_1)}$ есть не что иное, как разность

$$P^0_{n_1 n_2 \ldots n_k}-\sum_{n_{k+1}=1}^{\infty} P_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}.$$

Применяя лемму II, мы построим в каждом $\theta^{(\nu_1)}$ элемент Бэра $E^{(\nu_1)}$, плотный на $\theta^{(\nu_1)}$. Если мы выбросим из $\theta^{(\nu_1)}$ элемент $E^{(\nu_1)}$, то оставшаяся часть разбивается на счетное множество канонических элементов класса 2, которые мы обозначим через $\theta^{(\nu_1 \nu_2)}$.

Каждое $\theta^{(\nu_1 \nu_2)}$ есть не что иное, как разность

$$P^{(\nu_1)}_{n_1 \ldots n_k}-\sum_{n_{k+1}=1}^{\infty} P^{(\nu_1)}_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$$

и мы можем, очевидно, предположить, что элементы E_0 и $E^{(\nu_1)}$ всюду плотны на каждом $P^{(\nu_1)}_{n_1\ldots n_k}$.

Вообще, когда определен элемент $\theta^{(\nu_1\nu_2\ldots\nu_m)}$ класса 2, мы, применяя лемму II, строим в $\theta^{(\nu_1\ldots\nu_m)}$ элемент Бэра $E^{(\nu_1\nu_2\ldots\nu_m)}$, плотный на $\theta^{(\nu_1\ldots\nu_m)}$. Если мы выбросим из $\theta^{(\nu_1\nu_2\ldots\nu_m)}$ элемент $E^{(\nu_1\nu_2\ldots\nu_m)}$, то оставшаяся часть разбивается на счетное множество канонических элементов класса 2, которое мы обозначим через $\theta^{(\nu_1\ldots\nu_m\nu_{m+1})}$. Каждое $\theta^{(\nu_1\ldots\nu_m\nu_{m+1})}$ есть не что иное, как разность

$$P^{(\nu_1\ldots\nu_m)}_{n_1n_2\ldots n_k}-\sum_{n+1=1}^{\infty}P^{(\nu_1\ldots\nu_m)}_{n_1\ldots n_kn_{k+1}},$$

и мы можем, очевидно, предположить, что элементы Бэра E_0, $E^{(\nu_1)}$, $E^{(\nu_1\nu_2)}$, ..., $E^{(\nu_1\ldots\nu_m)}$ всюду плотны на каждом $P^{(\nu_1\ldots\nu_m)}_{n_1\ldots n_k}$.

Пусть S — сумма всех элементов Бэра, таким образом построенных:

$$S=E_0+\sum_{\nu_1}E^{(\nu_1)}+\sum_{\nu_1\nu_2}E^{(\nu_1\nu_2)}+\ldots+\sum_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}E^{(\nu_1\nu_2\ldots\nu_m)}+\ldots$$

Мы покажем, что *множество S, таким образом построенное, есть множество в точности класса* 4.

Действительно, как мы заметили выше, если бы это было не так, то можно было бы заключить каждое $E^{(\nu_1\ldots\nu_m)}$ в множество $H^{(\nu_1\ldots\nu_m)}$ класса 2 таким образом, что каждая точка области $\mathcal{J}$ принадлежит не более, чем к конечному числу множеств $H^{(\nu_1\nu_2\ldots\nu_m)}$.

Предположим, наоборот, что такие множества $H^{(\nu_1\nu_2\ldots\nu_m)}$ существуют и рассмотрим элемент Бэра E_0. Так как H_0 есть сумма счетного множества канонических элементов класса 2, то мы находимся в условиях леммы I. Пусть θ_0 — канонический элемент класса 2 и π_0 — порция некоторого определяющего множества для E_0 такая, что θ_0 — второй категории на каждой порции π_0, так же как и на каждой содержащейся в π_0 порции произвольного определяющего множества для E_0. В этих условиях мы можем написать:

$$\pi_0=\pi_0\cdot\theta_0+F_{01}+F_{02}+\ldots+F_{0k}+\ldots,$$

где F_{0k} есть замкнутое множество, нигде не плотное на π_0 и на каждом определяющем множестве для E_0.

Следует заметить, что *каждое множество F_{0k} нигде не плотно на любом определяющем множестве*. Докажем это по индукции. Предположим, что F_{0k} нигде не плотно на каждом определяющем множестве для множеств $E^{(\nu_1)}$, $E^{(\nu_1\nu_2)}$, ..., ..., $E^{(\nu_1\nu_2 \dots \nu_\lambda)}$ и покажем, что это имеет место и для $E^{(\nu_1 \dots \nu_\lambda\nu_{\lambda+1})}$. Предположим, что это не так и, следовательно, множество F_{0k} плотно на некоторой порции σ некоторого определяющего множества для $E^{\nu_1^0 \dots \nu_\lambda^0\nu_{\lambda+1}^0}$. В силу леммы II σ содержит порцию определяющего множества для $E^{\nu_1^0 \dots \nu_\lambda^0}$, что не имеет места. Ч. т. д.

Пусть $E^{(\nu_1^0)}$ — плотный элемент Бэра, всюду плотный на π_0. Этот элемент заключен в множество $H^{(\nu_1^0)}$ класса 2. Применяя лемму I, мы можем определить канонический элемент θ_{μ_1} и порцию π_1 некоторого определяющего множества для $E^{(\nu_1^0)}$ такую, что θ_{μ_1} второй категории на π_1, так же как на каждой содержащейся в π_1 порции любого определяющего множества для $E^{(\nu_1)}$. В этих условиях можно написать:

$$\pi_1 = \pi_1 \cdot \theta_{\mu_1} + F_{11} + F_{12} + \dots + F_{1k} + \dots,$$

где F_{1k} есть замкнутое множество нигде не плотное на π_1 и на каждой лежащей в π_1 порции определяющего множества для $E^{(\nu_1)}$. Повторяя предыдущее рассуждение, мы покажем, что каждое множество F_{1k} нигде не плотно на содержащейся в π_1 порции любого определяющего множества. Мы выберем порцию π_1 так, чтобы она не содержала ни одной точки F_{01}, что всегда возможно, так как F_{01} нигде не плотно на π_0.

Вообще, после того, как получены равенства:

$$\pi_0 = \pi_0 \cdot \theta_0 + F_{01} + F_{02} + \dots + F_{0k} + \dots,$$
$$\pi_1 = \pi_1 \cdot \theta_{\mu_1} + F_{11} + F_{12} + \dots + F_{1k} + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\pi_m = \pi_m \cdot \theta_{\mu_1\mu_2 \dots \mu_m} + F_{m1} + F_{m2} + \dots + F_{mk} + \dots,$$

мы берем в порции π_m плотный элемент Бэра $E^{(\nu_1^0 \nu_2^0 \dots \nu_m^0)}$, всюду плотный на π_m. Этот элемент заключен в множество $H^{(\nu_1^0 \nu_2^0 \dots \nu_k^0)}$ класса 2. Применяя лемму II, мы можем определить канонический элемент $\theta_{\mu_1 \dots \mu_m \mu_{m+1}}$ и порцию π_{m+1} некоторого определяющего множества для $E^{(\nu_1^0 \dots \nu_m^0 \nu_{m+1}^0)}$ такую, что $\theta_{\mu_1 \dots \mu_m \mu_{m+1}}$ второй категории на каждой порции π_{m+1} и на каждой содержащейся в π_{m+1} порции произвольного определяющего множества для $E^{(\nu_1^0 \dots \nu_m^0 \nu_{m+1}^0)}$. В этих условиях мы можем написать:

$$\pi_{m+1} = \pi_{m+1} \cdot \theta_{\mu_1 \dots \mu_m \mu_{m+1}} + F_{m+1,\,1} + \\ + F_{m+1,\,2} + \dots + F_{m+1,\,k} + \dots,$$

где $F_{m+1,\,k}$ есть замкнутое множество, нигде не плотное на π_{m+1} и на всякой содержащейся в π_{m+1} порции любого определяющего множества для $E^{(\nu_1^0 \dots \nu_{m+1}^0)}$. Повторяя приведенное выше рассуждение, можно показать, что $F_{m+1,\,k}$ нигде не плотно на содержащейся в π_{m+1} порции произвольного определяющего множества. Мы выбираем порцию π_{m+1} таким образом, чтобы она не содержала точек $m+1$ первых множеств F каждой строки, что всегда возможно, так как каждое из этих множеств F нигде не плотно на π_m.

Установив это, обозначим через ξ точку, общую всем порциям $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m, \dots$ Такая точка обязательно существует, так как порции π_m суть совершенные множества, включенные одно в другое [8]. Из построения следует, что точка ξ не может принадлежать ни одному из замкнутых множеств F_{pq}. Следовательно, точка ξ принадлежит всем множествам $\theta_0, \theta_{\mu_1}, \theta_{\mu_1\mu_2}, \dots, \theta_{\mu_1\mu_2 \dots \mu_m}, \dots$ и, следовательно, бесконечному числу множеств $H^{(\nu_1 \dots \nu_m)}$, что противоречит предположению.

Итак, *класс S есть в точности класс* 4, *и его дополнение CS есть элемент класса* 4. Ч. т. д.

Арифметический пример элемента класса 4. Мы видели, что Бэр, после того как он нашел регулярный процесс построения элемента класса 3, построил *арифметический пример* элемента класса 3. Следуя этому пути Бэра, Л. В. Келдыш приходит к интерпретации своего регулярного процесса для построения элемента класса 4 с помощью *арифметического примера* элемента класса 4.

Так как полное изучение этого примера содержит много элементарных кропотливых деталей, мы ограничимся описанием хода конструкции этого элемента.

Мы начинаем с того, что берем в качестве E_0 в точности *арифметический* элемент Бэра класса 3. Итак, *элемент* E_0 *есть множество всех иррациональных точек, заключенных между* 0 и 1, *у которых неполные частные ранга n бесконечно возрастают вместе с n.*

Каждое определяющее множество $P^0_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ элемента E_0 может быть характеризовано следующим образом: это множество иррациональных точек $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots)$ интервала $(0,1)$ таких, что среди неполных частных α_ν есть в точности n_1, равных 1, n_2, равных 2, ..., n_k, равных k. Отсюда следует, что каждый канонический элемент $\theta^{(\nu_1)}$ класса 2, который является разностью

$$P^0_{n_1 n_2 \ldots n_k} - \sum_{n_{k+1}=1}^{\infty} P^0_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}},$$

может быть характеризован следующим образом: это множество точек $P^0_{n_1 \ldots n_k}$, у которых среди неполных частных существует бесконечное множество равных $k+1$.

В этих условиях можно немедленно доказать, что плотный на $\theta^{(\nu_1)}$ элемент $E^{(\nu_1)}$ может быть характеризован следующим образом: это множество тех иррациональных точек из $\theta^{(\nu_1)}$, у которых все целые положительные числа, исключая $k+1$, повторяются среди неполных частных лишь конечное число раз.

Отсюда следует, что сумма $\sum\limits_{\nu_1=1}^{\infty} E^{(\nu_1)}$ может быть характеризована как множество тех точек, у которых среди неполных частных одно и только одно целое положительное число повторяется бесконечное число раз.

Таким образом, следуя шаг за шагом приведенной выше общей конструкции множества S,

$$S = E_0 + \sum_{\nu_1} E^{(\nu_1)} + \sum_{\nu_1 \nu_2} E^{(\nu_1 \nu_2)} + \ldots + \sum_{\nu_1 \ldots \nu_m} E^{(\nu_1 \ldots \nu_m)} + \ldots,$$

можно показать без труда, с помощью простых рассуждений, что двойная сумма $\sum\limits_{\nu_1 \nu_2} E^{(\nu_1 \nu_2)}$ может быть охарактеризована как множество тех иррациональных точек, у которых среди неполных частных α_ν два и только два целых положительных числа повторяются бесконечное множество раз. И вообще, m-кратная сумма $\sum\limits_{\nu_1 \ldots \nu_m} E^{(\nu_1 \ldots \nu_m)}$ может быть характеризована как множество всех тех иррациональных точек, у которых среди неполных частных α_ν m и только m целых положительных чисел повторяются бесконечное множество раз.

Отсюда следует, что дополнение к множеству-сумме S, т. е. *элемент класса 4 есть множество тех иррациональных точек* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots)$, *содержащихся между* 0 и 1, *у которых среди неполных частных* α_ν *есть бесконечное множество различных, каждое из которых повторяется бесконечное множество раз.*

Понятие рассеянного множества (по Данжуа)

Данжуа ввел в теорию множеств важное понятие рассеянного множества и показал его фундаментальную роль в теории счетных множеств; это понятие в дальнейшем обобщалось и углублялось в работах по топологии[1]).

Мы перенесем эти идеи Данжуа в теорию множеств высших классов. Используя их, можно постигнуть сущность теоремы Бэра, касающейся класса 1, и искать аналогии ей в теории высших классов.

---

[1]) См. Frechet, Quelques propriétés des ensembles abstraits, Fundamenta Math., т. X, стр. 28. См. также «Espaces abstraits», Paris, 1928, стр. 174 и 267.

Рассеянные множества точек. Данжуа называет *рассеянным* всякое *счетное* множество, которое не содержит никакой части, *плотной на себе*[1]).

Другими словами, рассматриваемое множество E должно обладать следующим свойством: какова бы ни была его часть E_1, в ней существует точка x_1, *изолированная* в E_1.

Всякое счетное рассеянное множество может быть вполне упорядочено

$$\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_\omega,\ \ldots,\ \xi_\beta,\ \ldots|\alpha \qquad (\Xi)$$

таким образом, что каждая точка ξ_β изолирована в множестве всех точек ξ_γ, $\gamma \geqslant \beta$, т. е. можно найти порцию σ_β фундаментальной области $\mathcal{J}$, которая содержит точку ξ_β и не содержит ни одной из последующих точек ξ_γ, $\gamma > \beta$.

Чтобы в этом убедиться, перенумеруем все точки x данного рассеянного множества E с помощью целых положительных чисел

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \qquad (E)$$

Так как множество E рассеянное, то существуют точки, изолированные в E; выберем из этих точек первую в последовательности (E) и обозначим ее ξ_0.

Удалим из последовательности (E) эту точку ξ_0. Так как множество E рассеянное, то среди оставшихся точек последовательности (E) существуют изолированные точки; первую из них обозначим ξ_1.

Вообще, определив вполне упорядоченное множество ξ_0, ξ_1, ξ_2, ..., ξ_β, ...$|\gamma$, состоящее из точек E, снабженных индексами, меньшими числа γ, конечного или второго класса, мы удалим из последовательности E все эти точки. Если в последовательности (E) остались точки, то мы выберем среди них первую изолированную точку и обозначим ее через ξ_γ.

Так как E счетно, то этот процесс обязательно кончится. Итак, *всякое счетное рассеянное множество может быть представлено во вполне упорядоченной форме*

$$\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_\omega,\ \ldots,\ \xi_\beta,\ \ldots|\alpha \qquad (\Xi)$$

---

[1]) Множество называется *плотным на себе*, если каждая его точка является для него предельной точкой (Б э р, Теория разрывных функций, ГТТИ, М.—Л., 1932, стр. 60).

таким образом, что каждая точка ξ_β *может быть отделена от последующих точек с помощью порции* σ_β *области* $\mathcal{J}$, *которая содержит* ξ_β *и не содержит ни одной последующей точки* ξ_γ, *где* γ *больше, чем* β.

Обратно, всякое счетное множество точек E, которое можно представить в форме (Ξ) таким образом, что каждая точка ξ_β изолирована в множестве последующих точек ξ_γ, $\gamma \geqslant \beta$, обязательно *рассеяно*.

Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что, так как (Ξ) вполне упорядочено, что каждая часть E_1 множества E содержит первый элемент ξ_β, и так как ξ_β изолирована в множестве всех последующих точек ξ_γ, $\gamma \geqslant \beta$, то она тем более изолирована в E_1, чем наше утверждение доказано.

Итак, счетные рассеянные множества идентичны с множествами, которые могут быть представлены в приведенной выше вполне упорядоченной форме.

Установив это, мы докажем фундаментальное предложение относительно *счетных множеств класса* 1.

Теорема. *Для того чтобы счетное множество точек было класса* 1, *необходимо и достаточно, чтобы оно было рассеяно.*

Условие необходимо. Действительно, по самому определению, если счетное множество E не является рассеянным, то оно содержит часть E_1, плотную на самой себе. В этих условиях множество P точек фундаментальной области $\mathcal{J}$, которые являются предельными точками для E_1, есть множество *совершенное* (относительно $\mathcal{J}$), содержащее E_1. Так как E_1, очевидно, всюду плотно на P, то это имеет место и для общей части E_2 множеств E и P. Предположим, что E_2 есть множество класса $\leqslant 1$. Тогда, в силу теоремы Бэра о множествах класса $\leqslant 1$, существует порция π множества P, которая содержится целиком *или в* E_2, *или же* в его дополнении CE_2, что, очевидно, невозможно.

Мы заключаем, что всякое нерассеянное счетное множество точек есть в точности множество класса 2 (достижимое снизу).

Условие достаточно [9]. Пусть E — рассеянное множество точек. Это значит, что E может быть представлено во вполне упорядоченной форме

$$\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_\omega,\ \ldots,\ \xi_\beta \ldots \mid \alpha, \qquad (\Xi)$$

где каждая ξ_β отделима с помощью порции σ_β области $\mathcal{J}$, содержащей ξ_β и не содержащей ни одной из последующих точек ξ_γ, где γ больше, чем β.

Пусть F_β — замкнутое множество, которое получается выбрасыванием из $\mathcal{J}$ всех порций $\sigma_{\beta'}$, где β' меньше, чем β. В силу свойства порций $\sigma_{\beta'}$ ясно, что F_β содержит точку ξ_β. Тогда, если обозначить через π_β порцию F_β, определенную σ_β, то замкнутое множество π_β содержит точку ξ_β.

Установив это, обозначим через H множество тех точек $\mathcal{J}$, которые не принадлежат ни одной из порций σ_β, $0 \leqslant \beta < \alpha$; множество H, очевидно, замкнуто. В этих условиях вполне упорядоченная последовательность

$$H,\ \pi_0,\ \pi_1,\ \ldots,\ \pi_\omega,\ \ldots,\ \pi_\beta,\ \ldots \mid \alpha \tag{1}$$

состоит из счетного множества замкнутых множеств попарно без общих точек, сумма которых совпадает с $\mathcal{J}$. Значит, последовательность (1) представляет собой разложение всей области $\mathcal{J}$ на счетное множество замкнутых множеств без общих точек.

Легко видеть, что каждый член последовательности (1), кроме первого члена H, содержит одну и только одну точку множества E; для члена π_β это точка ξ_β.

Если мы выбросим из π_β точку ξ_β, то оставшееся множество будет, очевидно, множеством класса 1; обозначим его через R_β.

Итак, вся область $\mathcal{J}$ разложена на счетное множество множеств класса $\leqslant 1$: это множества H, ξ_β и R_β, где $0 \leqslant \beta < \alpha$. Так как эти множества попарно не имеют общих точек, то мы заключаем (стр. 74), что сумма счетного числа этих множеств, произвольным образом выбранных, есть множество класса $\leqslant 1$.

В частности, это имеет место для множества E, состоящего из точек ξ_β. Ч. т. д.

Анализ оперативного процесса теоремы Бэра для множеств класса 1. Для того чтобы найти отправную точку для наиболее естественного обобщения предшествующей теоремы, мы рассмотрим оперативный процесс, который послужил Бэру при доказательстве его теоремы.

Пусть E — точечное множество, обладающее необходимым свойством множеств класса $\leqslant 1$. Это значит, что, каково бы ни было совершенное множество P, существует его порция π, которая содержится целиком: либо в E, либо в его дополнении CE.

Назовем *нормальной* всякую порцию π множества P, которая обладает этим свойством. Так как каждая порция точечного множества определяется некоторой порцией области $\mathcal{J}$, концы которой *рациональны*, то нормальных порций может быть счетное множество.

Опишем теперь оперативный процесс Бэра. Мы начинаем с того, что выбрасываем из области $\mathcal{J}$ все нормальные порции этой области. Множество всех оставшихся точек замкнуто; мы его обозначим через F_1. Ясно, что все порции $\mathcal{J}$, смежные к F_1, *нормальны*[1]); обозначим их через $\pi_n^{(0)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Пусть P — наибольшее совершенное множество, содержащееся в F_1. Поступим таким же образом с P_1, т. е. выбросим из P_1 все его нормальные порции; множество оставшихся точек есть замкнутое множество, которое мы обозначим через F_2. Ясно, что части P_1, смежные к P_2, разбиваются на нормальные порции[2]); мы их обозначим через $\pi_n^{(1)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Вообще, если определено замкнутое множество F_β (если β — второго рода, то F_β, по определению, есть общая часть всех замкнутых множеств, ранее определенных), то мы обозначим через P_β наибольшее содержащееся в F_β совершенное множество. Выбросим из P_β все его нормальные порции. Множество оставшихся точек P_β есть замкнутое множество, которое мы обозначим через $F_{\beta+1}$. Ясно, что части P_β, смежные к $F_{\beta+1}$, разбиваются на нормальные порции; мы их обозначим через $\pi_n^{(\beta)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Продолжая таким же образом, мы построим вполне упорядоченную последовательность совершенных множеств

$$\mathcal{J}, P_1, P_2, \ldots, P_\omega, \ldots, P_\beta \ldots,$$

---

[1]) Можно включить, если это необходимо, в E_1 рациональные точки.

[2]) Если замкнутое множество F содержится в совершенном множестве P, то мы называем *частью P, смежной к F*, множество всех точек P, принадлежащих некоторому смежному интервалу к F.

где каждое последующее множество содержится в предшествующем и *нигде не плотно на нем.*

Отсюда следует, что эта последовательность заведомо *счетна* и что, следовательно, применение процесса Бэра закончится остановкой на некотором члене с индексом α конечным или второго класса, таким, что множество P_α пусто

$$P_\alpha \equiv 0.$$

Таков процесс Бэра.

Если мы захотим анализировать этот процесс, то вот что мы констатируем: *его конечной целью является осуществление полного разбиения области $\mathcal{J}$ на счетное множество отдельных точек и нормальных порций совершенных множеств попарно без общих точек.*

Действительно, так как множество P_β наибольшее в F_β совершенное множество, то множество-разность $F_\beta - P_\beta$ счетно (теорема Кантора-Бендиксона); значит, всех точек, принадлежащих к сумме множеств $F_\beta - P_\beta$ — счетное множество. С другой стороны, всех порций $\pi_n^{(\beta)}$ $(0 \leqslant \beta < \alpha, n = 1, 2, 3, \ldots)$ также счетное множество. Но фундаментальная область $\mathcal{J}$ есть, очевидно, сумма *счетных* множеств $E_\beta - P_\beta$ и *нормальных* порций $\pi_n^{(\beta)}$.

Так как всякая нормальная порция целиком содержится *или* в E, *или же* в его дополнении CE, то мы заключаем, что рассматриваемое множество E есть часть полного разбиения фундаментальной области $\mathcal{J}$ на счетное множество элементов класса $\leqslant 1$ и, следовательно, есть само множество класса $\leqslant 1$ (стр. 74).

Мы приходим, таким образом, к заключению: с принятой нами точки зрения процесс Бэра есть не что иное, как констатация для класса 1 того общего факта, что всякое множество E класса α есть часть полного разбиения фундаментальной области $\mathcal{J}$ на счетное множество попарно непересекающихся элементов класса $\leqslant \alpha$.

Значит, с принятой точки зрения, теорема Бэра о множествах класса 1 есть частный случай общей теоремы о структуре множеств, измеримых B (см. стр. 74).

Однако эта точка зрения несколько поверхностна, так как процесс Бэра не вполне адэкватен указанной теореме о структуре множеств, измеримых B, но содержит нечто большее.

Прежде всего, упомянутая теорема о структуре имеет *неопределенный* характер, так как все элементы, составляющие множества E и CE, перенумерованы при помощи целых положительных чисел. Процесс же Бэра существенно *трансфинитен* и это трансфинитное не может быть исключено никоим образом: мы докажем в дальнейшем, что существуют эффективно множества E класса 1, для которых процесс Бэра не остановится никогда раньше трансфинитного числа β и это, каково бы ни было β, заранее фиксированное. Благодаря этому важному факту *можно классифицировать множества класса* 1 *по длине разложения Бэра, и подклассы*, так полученные, представляют последовательность, подобную той, которую дает сама классификация Бэра — Валле-Пуссена.

Аналогия между теоремой стр. 74 и процессом Бэра неполна, так как замкнутые множества $\pi_n^{(\beta)}$, которые составляют множество E, не являются произвольными замкнутыми множествами попарно без общих точек, но *обладают вполне определенным свойством*, которого лишено, вообще говоря, произвольное разложение области $\mathcal{J}$ на замкнутые множества. Это свойство и составляет самое существо доказательства Бэра его теоремы о функциях (или множествах) класса 1.

Чтобы увидеть, в чем состоит это свойство, вернемся к аналогии, которая существует между обычными точками и элементами какого-либо класса.

Если $\mathfrak{E}$ — счетное множество элементов e класса 1, то мы назовем это множество *рассеянным*, если каждая его часть $\mathfrak{E}_1$ обладает изолированным[1]) элементом. Это — естественное обобщение понятия Данжуа для точек.

Если мы вернемся теперь к рассмотренному выше множеству E, то мы констатируем без труда, что *элементы* $\pi_n^{(\beta)}$ *класса* 1, *которые образуют множество* E *и которые нам дает процесс Бэра, образуют рассеянное множество в смысле введенного обобщения.*

---

[1]) Общее понятие изолированного элемента дано выше (стр. 68). В рассматриваемом случае элемент e класса 1 изолирован в множестве $\mathfrak{E}$ элементов e класса 1, если можно заключить e в множество H начального класса K_0 таким образом, что H не пересекается ни с одним другим элементом из $\mathfrak{E}$.

В самом деле, обозначим через $\mathfrak{E}$ множество отдельных точек и нормальных порций $\pi_n^{(\beta)}$, которые принадлежат к E. Чтобы убедиться, что множество $\mathfrak{E}$ рассеянное, достаточно показать, что каждая его часть $\mathfrak{E}_1$ содержит изолированный элемент. Но множество $\mathfrak{E}_1$ состоит из точек множеств-разностей $F_\beta - P_\beta$ и из порций $\pi_n^{(\beta)}$. Среди индексов β этих множеств есть наименьший; пусть это β_0. Если множество $\mathfrak{E}_1$ содержит эффективно точки $F_\beta - P_\beta$, то среди этих точек есть наверняка *изолированная* точка, так как множество $F_\beta - P_\beta$ рассеянное. Если $\mathfrak{E}_1$ не содержит ни одной точки $F_\beta - P_\beta$, то оно содержит эффективно порции $\pi_m^{(\beta)}$. Я утверждаю теперь, что каждая из этих порций изолирована в $\mathfrak{E}_1$. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что порция $\pi_n^{(\beta)}$ *нормальна,* следовательно, определена порцией области $\mathcal{J}$, которая не содержит ни одной точки ни множества $F_{\beta'} - P_{\beta'}$, ни порций $\pi_q^{(\beta')}$, если β' превосходит β, $\beta' > \beta$. Следовательно, рассматриваемая порция $\pi_m^{(\beta)}$ изолирована в $\mathfrak{E}_1$. Ч. т. д.

Аналогичным образом, точки $F_\beta - P_\beta$ и порции $\pi_n^{(\beta)}$, из которых состоит дополнение CE, образуют также *рассеянное* множество.

Обратно, если E и CE оба являются рассеянными последовательностями элементов класса 1, то существует процесс Бэра, который дает E и CE.

Значит, *имеется тождество между процессом Бэра и процессом, который позволяет представить множество класса* 1 *в форме рассеянной последовательности счетного множества элементов класса* 1 (замкнутых множеств).

Итак, мы естественно пришли к тому, чтобы рассматривать как обобщение процесса Бэра некоторый процесс разложения всякого множества класса α *в рассеянную* последовательность элементов класса α с условием, чтобы было доказано эффективное существование всех подклассов класса α, которые получатся, если классифицировать множества класса α по трансфинитной длине этого разложения.

Этот процесс будет предметом наших последующих рассмотрений.

Процесс Бэра в высших классах

Рассеянная последовательность элементов класса $\leqslant \alpha$. Предшествующее изучение множеств точек было необходимо для того, чтобы изучить роль элементов класса $\leqslant \alpha$ в образовании множеств. Сейчас своевременно по образцу идей Данжуа ввести новые понятия относительно *последовательностей* элементов класса $\leqslant \alpha$, понятия, которые позволят, как мы увидим, установить необходимые и достаточные условия для того, чтобы множество было класса $\leqslant \alpha$, и распределить множества класса α в трансфинитную последовательность подклассов по длине разложения Бэра.

Прежде всего мы установим следующее фундаментальное определение: *Множество $\mathfrak{E}$, образованное из счетного множества непересекающихся элементов класса α, называется рассеянным, если каждая часть $\mathfrak{E}$ содержит изолированный элемент*[1]).

Повторяя те же рассуждения, которые мы делали в случае рассеянных точечных множеств, мы заключаем, что $\mathfrak{E}$ можно представить во вполне упорядоченной форме

$$e_0, e_1, e_2, \ldots, e_\omega, \ldots, e_\beta, \ldots | \gamma \qquad (\mathfrak{E})$$

таким образом, что каждый элемент e_β может быть отделен от последующих элементов с помощью множества H_β, содержащего e_β и не содержащего никакой части элемента $e_{\beta'}$, где индекс β' превосходит β, причем H_β *либо* множество класса меньшего, чем e_β, *либо же* принадлежит к базе класса e_β.

С другой стороны, ясно, что каждое множество элементов $\mathfrak{E}$, которое можно представить в форме ($\mathfrak{E}$) таким образом, что каждый элемент e_β изолирован в множестве всех последующих элементов $e_{\beta'}$, $\beta' \geqslant \beta$, — обязательно рассеянно.

Мы можем теперь приступить к изучению условий, которым удовлетворяют множества класса α. *Достаточное условие для того, чтобы множество было класса* $\leqslant \alpha$, выражается следующим образом:

---

[1]) Мы говорим вообще, что элемент e класса α, принадлежащий семейству множеств F, *изолирован* в этом семействе, если существует отделяющее множество H или класса $< \alpha$, или из базы B_α, которое содержит e и не содержит точек ни одного из других множеств семейства F.

Теорема 1. *Всякое рассеянное множество элементов класса $\leqslant \alpha$ есть множество класса $\leqslant \alpha$.*

Пусть

$$e_0, e_1, e_2, \ldots, e_\omega, \ldots, e_\beta, \ldots | \gamma \tag{$\mathfrak{E}$}$$

рассеянное множество класса $\leqslant \alpha$. Член e_β содержится в отделяющем множестве H_β, которое не имеет общей части ни с одним из последующих множеств $e_{\beta'}$, $\beta' > \beta$. Множество H_β *либо* класса меньшего, чем e_β, *либо же* принадлежит к базе класса e_β.

Пусть F_β — множество, которое получается выбрасыванием из $\mathcal{J}$ всех отделяющих множеств $H_{\beta'}$, где β' меньше, чем β; легко видеть, что F_β *или* класса $< \alpha$, *или* принадлежит к базе B_α, *или же* есть элемент класса α. В силу свойства множеств H_β, ясно, что F_β содержит элемент e_β. Следовательно, если мы обозначим через π_β общую часть $H_\beta \cdot F_\beta$, то множество π_β содержит e_β. Установив это, обозначим через Q множество точек $\mathcal{J}$, которые не принадлежат ни одному из отделяющих множеств H_β, $0 \leqslant \beta < \gamma$. Вполне упорядоченная последовательность

$$Q, \pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\omega, \ldots, \pi_\beta, \ldots | \gamma \tag{1}$$

состоит, очевидно, из счетного множества множеств: *или* класса $< \alpha$, *или* из базы B_α, *или же* элементов класса α. Легко видеть, что эти множества не имеют попарно общей части и что их сумма совпадает с областью $\mathcal{J}$. Следовательно, последовательность (1) есть разбиение всей области $\mathcal{J}$ на счетное множество множеств класса $\leqslant \alpha$.

После этого обозначим через E сумму членов рассеянной последовательности ($\mathfrak{E}$). Ясно, что множество Q не содержит ни одной точки E, и что точки E, принадлежащие к π_β, образуют элемент e_β. Следовательно, если мы вычтем из π_β элемент e_β, то множество-разность R_β есть множество класса $\leqslant \alpha$ и не содержит точек E.

Отсюда следует, что вся область $\mathcal{J}$ разложена на счетное множество множеств класса $\leqslant \alpha$: это множества Q, e_β, R_β, где $0 \leqslant \beta < \gamma$. Так как эти множества попарно без общих точек, то мы заключаем (стр. 74, примечание), что сумма бесконечного множества этих множеств, произвольно выбранных, есть множество класса $\leqslant \alpha$. В частности, это так для множества E, составленного из e_β.

Следует заметить, что доказательство этой теоремы тождественно (кроме обозначений) с доказательством соответствующей теоремы для *точечных* рассеянных множеств (стр. 105).

Регулярное параметрическое изображение множеств. Мы пришли к вопросу, является ли это найденное нами достаточное условие, для того чтобы точечное множество было класса $\leqslant \alpha$, *необходимым*. Чтобы решить этот вопрос в положительном смысле, нужно сначала изучить некоторые предварительные вопросы.

Мы установим сначала новое определение.

Назовем *регулярной* всякую функцию $f(t)$, определенную в фундаментальной области $\mathcal{J}_t$, которая никогда не принимает двух равных значений; каждая регулярная функция есть разнозначная функция: если $t' \neq t''$, то

$$f(t') \neq f(t'').$$

Мы говорим теперь, что какое-либо множество E точек фундаментальной области $\mathcal{J}_x$ *обладает регулярным параметрическим изображением*, если E есть множество значений функции $x = f(t)$, определенной на порции (0,1) фундаментальной области $\mathcal{J}_t$, непрерывной и регулярной на этой порции.

Ясно, что *каждое множество E, которое обладает регулярным параметрическим изображением, имеет мощность континуума и содержит совершенное множество.* Чтобы в этом убедиться, возьмем в порции (0,1) области $\mathcal{J}_t$ множество P, совершенное в абсолютном смысле. Так как функция $x = f(t)$ непрерывна и регулярна, то множество Q значений, которые $f(t)$ принимает на P, есть совершенное множество; легко видеть, что Q содержится в E.

Можно заметить, что каждое множество E, обладающее регулярным параметрическим изображением, не может иметь изолированных точек.

Установив это, введем следующее определение. Пусть E — множество класса K_α, состоящее из точек $\mathcal{J}_x$; мы предположим, что E обладает регулярным параметрическим изображением $x = f(t)$. Назовем это изображение *нормальным*, если множество значений, которые $f(t)$ принимает на произвольной порции, есть множество класса $\leqslant \alpha$.

Установив это определение, мы можем доказать следующую теорему:

Теорема. *Всякое несчетное измеримое B множество обладает нормальным параметрическим изображением, если исключить из него счетное множество точек.*

Утверждение очевидно в случае, если E принадлежит начальному классу K_0, так как в этом случае E есть сумма счетного множества *порций* области $\mathcal{J}_x: E = \pi_1 + \pi_2 + \ldots$ и можно построить подобное отображение интервала Бэра (n) порядка 1 области $\mathcal{J}_t$ на π_n, что и определяет нормальное изображение E[1]).

Установив это, предположим, что предложение верно для всех классов, предшествующих K_α, и докажем, что оно верно и для класса α.

Заметим сначала, что все сводится к доказательству утверждения для *элементов* класса K_α. Действительно, всякое множество E класса K_α есть сумма счетного множества элементов класса $\leqslant \alpha$ попарно без общих точек: $E = \pi_1 + \pi_2 + \ldots$ Достаточно, очевидно, изобразить нормально π_n на интервале Бэра (n) порядка 1, чтобы иметь нормальное изображение E.

Предположим же, что E есть элемент (несчетный, если $\alpha = 1$) класса α. Мы имеем:

$$E = E_1 \cdot E_2 \ldots E_n \ldots,$$

где все множества E_n класса $< \alpha$, и последовательность их убывающая

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$$

Пусть $x = f_n(t)$ — нормальное изображение E_n на порции фундаментальной области $\mathcal{J}_{t_n}$; в этом изображении исключена, быть может, счетная часть E_n.

Установив это, рассмотрим новую область $\mathcal{J}_t$ и возьмем порцию (0,1) этой области. Мы установим взаимно однозначное соответствие между точкой t порции (0,1) области $\mathcal{J}_t$

[1]) Вообще, если дана система целых положительных чисел, расположенных в определенном порядке: $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то *интервалом Бэра* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ называется множество всех иррациональных точек, у которых представление в виде непрерывной дроби начинается с $a_1, a_2, \ldots, a_k$; этот интервал называется интервалом порядка k.

и системой, состоящей из счетного множества точек $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, где каждая точка t_n взята в порции (0,1) соответствующей области $\mathcal{J}_{t_n}$. Процесс, который позволит нам установить это соответствие, заключается в следующем:

Каждому интервалу Бэра порядка 1 области $\mathcal{J}_t$ мы поставили в соответствие интервал Бэра порядка 1 области $\mathcal{J}_{t_1}$ и наоборот.

Всякому интервалу Бэра δ порядка 2 области $\mathcal{J}_t$ мы поставим в соответствие группу Γ_2, состоящую из двух интервалов Бэра порядка 2 — δ_1 и δ_2, соответственно содержащихся в $\mathcal{J}_{t_1}$ и $\mathcal{J}_{t_2}$ таким образом, что интервал порядка 1, содержащий δ, соответствует интервалу порядка 1, содержащему δ_1; и *обратно*, каждой аналогичной группе Γ_2 соответствует интервал Бэра порядка 2 из области $\mathcal{J}_t$.

Вообще, каждому интервалу Бэра δ ранга n из области $\mathcal{J}_t$ соответствует группа Γ_n, состоящая из n интервалов Бэра $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ порядка n, содержащихся соответственно в $\mathcal{J}_{t_1}, \mathcal{J}_{t_2}, \ldots, \mathcal{J}_{t_n}$ таким образом, что интервал Бэра порядка $n-1$, содержащий δ, соответствует группе Γ_{n-1}, состоящей из интервалов Бэра порядка $n-1$, содержащих соответственно $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$; и *обратно*, всякой аналогичной группе Γ_n соответствует интервал Бэра порядка n области $\mathcal{J}_t$.

Так как каждая иррациональная точка, заключенная между 0 и 1, есть общая часть последовательности интервалов Бэра порядка $1, 2, \ldots, n, \ldots$, заключенных один в другой, то указанный процесс нам дает уравнения:

$$t_1 = \varphi_1(t), \ t_2 = \varphi_2(t), \ \ldots, \ t_n = \varphi_n(t), \ \ldots$$

$\varphi_n(t)$ непрерывна на $\mathcal{J}_t$. Каждой последовательности точек $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, расположенных соответственно в порциях (0,1) областей $\mathcal{J}_{t_1}, \mathcal{J}_{t_2}, \ldots, \mathcal{J}_{t_n}, \ldots$, соответствует одна и только одна точка области $\mathcal{J}_t$. Если $t' \neq t''$, то существует число i такое, что $\varphi_i(t') \neq \varphi_i(t'')$, так как двум различным интервалам Бэра δ' и δ'' порядка n, содержащим точки t' и t'', соответствуют две *различные* группы Γ'_n и Γ''_n, состоящие каждая из n интервалов Бэра порядка n, расположенных в $\mathcal{J}_{t_1}, \mathcal{J}_{t_2}, \ldots, \mathcal{J}_{t_n}$. Суперпозиции:

$$\begin{gathered} x = f_1[\varphi_1(t)] = F_1(t), \\ x = f_2[\varphi_2(t)] = F_2(t), \\ \cdots\cdots\cdots \\ x = f_n[\varphi_n(t)] = F_n(t) \\ \cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

дают функции, непрерывные на $\mathcal{J}_t$. Отсюда следует, что совместные равенства

$$F_1(t) = F_2(t) = \ldots = F_n(t) = \ldots$$

определяют в $\mathcal{J}_t$ множество точек, замкнутое в $\mathcal{J}_t$, мы его обозначим через T.

Когда t пробегает (0,1), то точка t_i пробегает бесконечно много раз порцию (0,1) области $\mathcal{J}_{t_i}$. Следовательно, $x = F_i(t)$ пробегает бесконечно много раз множество E_i, и никогда из него не выходит. Отсюда следует, если обозначить через $F(t)$ общее значение функций

$$F_1(t) = F_2(t) = \ldots = F_n(t) = \ldots,$$

что уравнение

$$x = F(t)$$

дает нам точку общей части $E_1 \cdot E_2 \ldots E_n \ldots$ и что всякая точка x этой общей части может быть получена таким образом.

Функция $x = F(t)$ непрерывна на T. Важно заметить, что она *регулярна* на T, так как если $t' \neq t''$, то существует функция φ_i такая, что

$$\varphi_i(t') \neq \varphi_i(t'');$$

значит, так как $f_i(t_i)$ регулярна на $\mathcal{J}_{t_i}$, то имеем

$$F_i(t') \neq F_i(t'')$$

и, следовательно,

$$F(t') \neq F(t'').$$

Мы предположим, что множество E несчетно. Тогда и множество T несчетно; при этом оно замкнуто в $\mathcal{J}_t$.

Так как T несчетно, то существует полное разложение порции (0,1) области $\mathcal{J}_t$ на интервалы Бэра δ такое, что существует бесконечно много интервалов δ, каждый из которых содержит несчетное множество точек T. Установим взаимнооднозначное соответствие между этими δ и интервалами Бэра Δ порядка 1 новой фундаментальной области $\mathcal{J}_\tau$.

Каждый из этих δ может быть разложен полностью на интервалы Бэра δ' так, что найдется бесконечно много δ', каждый из которых содержит несчетную часть T. Установим взаимно однозначное соответствие между этими δ', содержащимися в δ, и интервалами Бэра Δ' порядка 2, принадлежащими соответствующему Δ.

Вообще, если $\delta^{(n-1)}$ и $\Delta^{(n-1)}$ — два соответственных интервала Бэра, первый из которых содержит несчетную часть T, а второй есть интервал Бэра порядка $(n-1)$ области $\mathcal{J}_\tau$, мы разобьем полностью $\delta^{(n-1)}$ на интервалы Бэра $\delta^{(n)}$ таким образом, чтобы существовало бесконечное множество $\delta^{(n)}$, каждый из которых содержит несчетную часть T. Установим взаимно однозначное соответствие между этими $\delta^{(n)}$ и интервалами Бэра $\Delta^{(n)}$ порядка n, принадлежащими $\Delta^{(n-1)}$.

Мы определили в порции (0,1) новой области $\mathcal{J}_\tau$ функцию

$$t = \psi(\tau),$$

непрерывную и регулярную на (0,1). Если τ пробегает порцию (0,1) области $\mathcal{J}_\tau$, то точка t пробегает множество T кроме, быть может, счетного множества точек T. Когда τ пробегает интервал Бэра Δ области $\mathcal{J}_\tau$, то точка t пробегает, очевидно, часть T, содержащуюся в интервале Бэра δ, соответствующем Δ (с точностью до счетного множества точек этой части). Пусть ν — порядок δ. Когда t пробегает δ, то точки

$$t_1 = \varphi_1(t),\ t_2 = \varphi_2(t),\ \ldots,\ t_\nu = \varphi_\nu(t)$$

пробегают каждая интервал Бэра порядка ν, и эти интервалы содержатся соответственно в $\mathcal{J}_{t_1}, \mathcal{J}_{t_2}, \ldots, \mathcal{J}_{t_\nu}$, тогда как другие точки $t_{\nu+1} = \varphi_{\nu+1}(t)$, $t_{\nu+2} = \varphi_{\nu+2}(t), \ldots$ пробегают каждая порцию (0,1) соответственных областей $\mathcal{J}_{t_{\nu+1}}, \mathcal{J}_{t_{\nu+2}}, \ldots$

Но каждая функция $x = f_i(t_i)$ дает нам *нормальное* изображение E_i на порции (0,1) области $\mathcal{J}_{t_i}$. Это значит, что когда t_i пробегает порцию области $\mathcal{J}_{t_i}$, то точка x пробегает часть E_i класса $< \alpha$. Отсюда следует, что когда t пробегает δ, то сложная функция $f_i[\varphi_i(t)]$ пробегает часть E_i класса $< \alpha$, если $i \leqslant \nu$, и пробегает все множество E_i, если $i > \nu$. Отсюда можно заключить, что когда τ пробегает интервал Бэра Δ в $\mathcal{J}_\tau$, то сложная функция

$$x = F[\psi(\tau)] = \Phi(\tau)$$

пробегает общую часть бесконечного множества множеств класса $< \alpha$, т. е. *или* множество класса $< \alpha$, *или* множество базы B_α, *или же* элемент класса α[10]. С другой стороны, легко видеть, что $\Phi(\tau)$ непрерывна и регулярна на порции (0,1) области $\mathcal{J}_\tau$, и что множество значений на (0,1) совпадает с множеством $E = E_1 \cdot E_2 \ldots$, кроме счетного множества точек. Следовательно, уравнение $x = \Phi(\tau)$ дает нам регулярное параметрическое изображение E.

Нам остается только доказать, что это изображение нормальное. Для этого мы докажем, что множество значений $\Phi(\tau)$ на каждом множестве H класса O, расположенного в порции (0,1) области $\mathcal{J}_\tau$, есть множество класса $\leqslant \alpha$. Но так как H и его дополнение CH являются оба суммами счетного множества порций $\mathcal{J}_\tau$, то они являются очевидно суммами интервалов Бэра. Отсюда следует, что множество значений $\Phi(\tau)$ на H, которое мы обозначим $\Phi(H)$, так же как и множество $\Phi(CH)$ значений $\Phi(\tau)$ на CH, являются оба суммами счетного множества множеств класса $\leqslant \alpha$ без общих точек. Так как полная сумма этих множеств есть, очевидно, E, то мы заключаем, что $\Phi(H)$ есть часть полного разбиения множества класса $\leqslant \alpha$ на счетную сумму множеств класса $\leqslant \alpha$ без общих точек. Следовательно[1]), класса $\Phi(H)$ не превосходит α и параметрическое изображение E, $x = \Phi(\tau)$ *нормально.* Ч. т. д.

Мы дополним этот результат следующими замечаниями:

Замечание I. Из доказательства следует, что если E — элемент класса α, то нормальное параметрическое изображение $x = \Phi(\tau)$, которое мы сейчас получили, ставит в соответствие каждому интервалу Бэра δ из $\mathcal{J}_\tau$ множество $\Phi(\delta)$

---

[1]) См. примечание на стр. 74.

значений $\Phi(\tau)$ на δ, которое либо класса $<\alpha$, либо из базы B_α, либо же элемент класса α.

Замечание II. Если E—двустороннее множество класса α, то для E существует нормальное изображение $x=\Phi(\tau)$ такое, что каждому множеству H класса O соответствует или множество класса $<\alpha$, или множество из базы B_α.

Действительно, достаточно разложить E на счетную сумму элементов класса $<\alpha$ и осуществить нормальное изображение этих элементов соответственно на интервалах Бэра ранга 1 области $\mathcal{J}_\tau$. Ясно, что полное изображение $x=\Phi(\tau)$ множества E, таким образом полученное, есть нормальное изображение, обладающее высказанным свойством.

Изображение произвольного множества класса α в форме рассеянной последовательности элементов. Мы предпримем сейчас общее изучение произвольного множества класса K_α. Пусть E — какое-то множество класса α. Мы имеем

$$E=\lim_{n\to\infty} E_n,$$

где множества E_n класса $<\alpha$.

Прежде всего мы устраним случай, когда одно из дополнительных множеств CE_i счетно (или конечно). Действительно, если множества CE_i, которые счетны (конечны), имеются в ограниченном числе, то мы можем исключить соответствующие множества E_i из последовательности $E_1, E_2, \ldots$

Если этих множеств CE_i бесконечно много, то само множество CE, очевидно, счетно (конечно). Тогда, *или* E есть элемент класса 2, *или же* E класса 1 и, следовательно, CE — *рассеянное множество точек* (стр. 105).

Итак, все сводится к изучению случая, когда каждое из множеств E_n и CE_n *несчетно*, каково бы ни было целое положительное n.

В этих условиях мы можем написать последовательность уравнений

$$x=f_1(t_1),\quad x=f_2(t_2),\quad \ldots,\quad x=f_n(t_n),\quad \ldots,$$

которые дают, каково бы ни было n, нормальное изображение E_n на порции $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и CE_n на $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ области $\mathcal{J}_{t_n}$, исключая счетное множество точек.

Возьмем новую фундаментальную область $\mathcal{J}_t$ и рассмотрим уравнения

$$t_1 = \varphi_1(t),\ t_2 = \varphi_2(t),\ \ldots,\ t_n = \varphi_n(t),\ \ldots$$

и сложные функции

$$\begin{gathered} x = f_1[\varphi_1(t)] = F_1(t), \\ x = f_2[\varphi_2(t)] = F_2(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x = f_n[\varphi_n(t)] = F_n(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

которые мы изучали при доказательстве предыдущей теоремы (стр. 115—116).

Так же как в этом доказательстве, совместные равенства

$$F_1(t) = F_2(t) = \ldots = F_n(t) = \ldots$$

определяют на $\mathcal{J}_t$ множество точек T, замкнутое в этой области.

Пусть $F(t)$ — общее значение этих функций на T. Это функция, определенная на T, непрерывная и регулярная на этом множестве и такая, что уравнение

$$x = F(t)$$

преобразует множество T во всю область $\mathcal{J}_x$, кроме счетного множества ее точек.

Так же как в доказательстве предыдущей теоремы, мы преобразуем с помощью функции

$$t = \psi(\tau)$$

порцию (0,1) области $\mathcal{J}_\tau$ в множество T, кроме, быть может, счетного множества точек из T.

Сложная функция

$$x = F[\psi(\tau)] = \Phi(\tau)$$

непрерывна и регулярна в (0,1) и преобразует эту порцию во всю область $\mathcal{J}_x$ с точностью до счетного множества точек. Нужно изучить свойства функции $\Phi(\tau)$.

Прежде всего, функция $x = f_n(t_n)$ дает нам *нормальное* изображение E_n и CE_n на $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ области $\mathcal{J}_{t_n}$, это значит, что функция $f_n(t_n)$ ставит в соответствие каждому интервалу Бэра δ области $\mathcal{J}_{t_n}$ множество $f_n(\delta)$ значений $f_n(t_n)$ на δ, которое есть множество класса $< \alpha$. Отсюда вытекает, с помощью такого же рассуждения, как то, которое мы проводили для доказательства предыдущей теоремы, что рассматриваемая функция $x = \Phi(\tau)$ ставит в соответствие каждому интервалу Бэра δ области $\mathcal{J}_\tau$ множество $\Phi(\delta)$ класса строго меньшего α, лежащее в $\mathcal{J}_x$[1]).

Установив это, обозначим через e_n прообраз множества E_n при отображении с помощью функции $x = \Phi(\tau)$; e_n есть множество, лежащее в $\mathcal{J}_\tau$, такое, что $\Phi(e_n)$ совпадает с E_n. Легко видеть, что множество e_n есть класса O.

Действительно, необходимое и достаточное условие для того чтобы точка $x = \Phi(\tau)$ принадлежала к E_n, состоит в том, что значение $\varphi_n[\psi(\tau)]$ принадлежит порции $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ области $\mathcal{J}_{t_n}$, что в силу непрерывности $\varphi_n[\psi(\tau)]$ возможно только в случае, когда e_n есть множество начального класса K_0.

Очевидно, что последовательность множеств класса O

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

сходится и имеет пределом множество e, которое есть прообраз E для $x = \Phi(\tau)$; множество E, очевидно, класса $\leqslant 1$.

Возможны два случая.

Первый случай: множество e класса O. В этом случае e и его дополнение Ce являются оба суммами счетного множества интервалов Бэра. Отсюда следует, что E и CE являются оба суммами счетного множества множеств класса $< \alpha$. Значит, E есть множество из базы B_α.

Второй случай: класс e равен 1. В этом случае процесс Бэра, примененный к e, дает нам вполне определенное разложение e в рассеянную последовательность элементов класса 1 (замкнутых множеств):

$$e = \eta_0 + \eta_1 + \ldots + \eta_\omega + \ldots + \eta_\beta + \ldots | \gamma,$$

где η_n с конечным индексом n есть интервал Бэра и η_β,

---

[1]) Мы обозначаем здесь через $\Phi(\delta)$ множество значений функции $\Phi(\tau)$ на интервале δ. Вообще, если дана некоторая функция $f(x)$, определённая в области $\mathcal{J}_x$, и множество E, лежащее в этой области, то мы обозначаем через $f(E)$ *множество значений, которые принимает $f(x)$ на E*.

где индекс β второго класса и меньше γ, есть нигде не плотное совершенное множество и изолировано от всех последующих $\eta_{\beta'}$, $\beta' > \beta$ с помощью интервала Бэра h_β.

Это разложение e осуществлено в области $\mathcal{J}_\tau$. В области $\mathcal{J}_\infty$ ему соответствует следующее разложение множества E:

$$E = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_\omega + \ldots + \varepsilon_\beta + \ldots | \gamma, \qquad (1)$$

где ε_β есть образ η_β для $x = \Phi(\tau)$. Интервал Бэра h_β преобразуется в множество H_β класса, строго меньшего α. Легко видеть, что ε_β содержится в H_β, так как η_β содержится в h_β. Из того, что h_β не имеет общих точек ни с одним из последующих множеств $\eta_{\beta'}$, $\beta' > \beta$, следует, что H_β не имеет общих точек ни с одним из последующих множеств $\varepsilon_{\beta'}$, $\beta' > \beta$.

Остается только изучить природу множеств ε_β. Так как η_β — совершенное нигде не плотное множество, то его дополнение $C\eta_\beta$ есть сумма интервалов Бэра. Тогда образ $C\eta_\beta$ есть *или* множество класса $< \alpha$, *или же* множество класса α, достижимое снизу. В этих условиях множество ε_β есть *либо* множество класса $< \alpha$, *либо* из базы B_α, *либо* элемент класса α.

Установив это, удалим из разложения (1) множества E все ε, которые *либо* суть множества класса $< \alpha$, *либо* из базы B_α и составим их сумму S. Остаются только элементы ε_β строго класса α, заключенные в соответствующие множества H_β класса $< \alpha$, которые их отделяют от множеств $\varepsilon_{\beta'}$, за ними следующих. Множество R оставшихся элементов есть *рассеянное* множество.

Мы пришли, таким образом, к следующему результату:

Всякое множество E класса α может быть разложено на множество S класса α, достижимое снизу, и рассеянное множество R, образованное из элементов класса α

$$E = S + R.$$

Подклассы, их существование

Распространение результатов на случай множества точек в пространстве нескольких измерений. Мы теперь рассмотрим с общей точки зрения вопросы, изученные в предшествующих номерах, и для этого остановимся на случае множества точек в пространстве нескольких измерений. Для определенности мы ограничимся случаем пространства *двух* измерений.

Прежде всего, рассматривая определения главы I (стр. 49), относящиеся к множествам в пространстве нескольких измерений, мы заметим немедленно, что все понятия и все рассуждения, сделанные для *линейных* точечных множеств, сохраняются для евклидова пространства нескольких измерений. Таким же образом мы можем классифицировать измеримые B множества, лежащие в пространстве нескольких измерений в трансфинитную последовательность классов Бэра — Валле-Пуссена, и в каждом классе этой классификации мы будем иметь элементы множества, достижимые снизу, и множества, недостижимые с обеих сторон; если класс K_α второго рода, то в нем есть двусторонние множества, которые образуют базу B_α этого класса.

Остается уяснить понятие *параметрического изображения* в случае множества точек нескольких измерений.

Мы говорим, что точечное множество E, лежащее в фундаментальной области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ m измерений, *обладает параметрическим изображением*, если множество E есть совокупность последовательных положений подвижной точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, координаты которой суть функции переменного параметра t, определенного в порции (0,1) фундаментальной области $\mathcal{J}_t$

$$x_1=f_1(t),\ x_2=f_2(t),\ \ldots,\ x_n=f_n(t).$$

Параметрическое изображение множества E называется *регулярным*, если двум различным значениям t' и t'' параметра t соответствуют две различные точки множества E.

Пусть E — измеримое B множество какого-то класса K_α. Мы говорим, что регулярное параметрическое изображение множества

$$x_1=f_1(t),\ x_2=f_2(t),\ \ldots,\ x_n=f_n(t)$$

нормально, если функции f_i *непрерывны* в порции (0,1) области $\mathcal{J}_t$ и если каждой порции этой области соответствует часть E, *класс которой не превосходит* α.

Все рассуждения предыдущих параграфов остаются верными, и мы имеем следующую теорему:

Всякое несчетное измеримое B множество обладает нормальным изображением, если исключить точки этого множества в конечном или счетном числе.

С помощью этой теоремы, не делая никаких изменений в предшествующих рассуждениях, мы приходим к следующему фундаментальному результату:

Всякая рассеянная последовательность, образованная из счетного множества элементов класса $\leqslant \alpha$, есть множество класса $\leqslant \alpha$. Обратно, каждое множество E класса K_α может быть разложено на множество S класса α, достижимое снизу, и на рассеянное множество R, образованное элементами класса α:

$$E = S + R.$$

Для $\alpha = 1$ мы получаем теорему Бэра о множествах класса 1, так как эффективный процесс Бэра есть не что иное, как разложение множества класса 1 в рассеянную последовательность элементов класса 1.

Возникает вопрос — может ли трансфинитная рассеянная последовательность элементов класса K_α всегда быть сведена к некоторому, относительно малому, трансфинитному числу γ своих членов? Другими словами, можно ли всегда разложить данное множество E класса K_α таким образом, что рассеянной вполне упорядоченной последовательности R элементов класса α соответствует трансфинитное число γ, всегда меньшее некоторого фиксированного числа второго класса?

Мы увидим, что ответ отрицателен и что существуют эффективно множества E класса K_α, для которых рассеянному множеству R соответствует сколь угодно большое трансфинитное число второго класса γ, причем это число не может быть понижено. В порядке этих идей удобно ввести новое понятие *подкласса* классификации Бэра — Валле-Пуссена.

Пусть дано множество E класса K_α; мы говорим, что E есть множество *подкласса* β, если при каждом разложении E на множество S класса α, достижимое снизу, и на счетную вполне упорядоченную рассеянную последовательность R, образованную из элементов класса α

$$E = S + R,$$

соответствующее R число γ не меньше, чем β, и если оно эффективно равно β при некотором определенном разложении E.

Из этого определения следует, что каждое множество E класса α, достижимое снизу, есть множество *подкласса* O и каждый элемент класса α есть множество *подкласса* 1.

Возникает вопрос: *существуют ли множества класса α и всякого подкласса?*

Мы изложим теперь исследования по этому вопросу М. А. Лаврентьева, важные результаты которого опубликованы им в статье «Sur les sous-classes de la classification de M. Baire»[1]).

Универсальный элемент двух измерений. Возьмем в области $\mathcal{J}_{xy}$ двух измерений множество E класса K_α. Если мы его пересечем прямой $x=x_0$, параллельной оси OY, то получим вполне определенное линейное множество e. Рассмотрим природу этого линейного множества.

Прежде всего, если E класса O, то таково же и линейное множество E, так как в этом случае E и его дополнение CE — оба являются суммами порций двух измерений; но каждая такая порция пересекается прямой $x=x_0$ по линейной порции.

Методом трансфинитной индукции легко доказать для множеств высших классов: *всякое множество E двух измерений класса α пересекается каждой прямой $x=x_0$ по линейному множеству класса* $\leqslant\alpha$, рассмотренному не как часть плоскости, но как линейное множество, измеримое B, лежащее в области $\mathcal{J}$. Эта теорема верна для $\alpha=0$ и легко видеть, что она верна для α (первого или второго рода) при условии, что она верна для всех трансфинитных чисел $<\alpha$.

Так как каждое множество класса α, достижимое сверху, есть общая часть счетного числа множеств классов $<\alpha$, то мы имеем следующее следствие: *всякий элемент E двух измерений класса α пересекается каждой прямой $x=x_0$ по множеству e, которое* либо *класса* $<\alpha$, либо *из базы* B_α, либо же *элемент класса α.*

Установив это, мы введем следующее определение: мы говорим, что элемент E двух измерений класса α *универсален*, если всевозможные линейные элементы класса α можно

---

[1]) C. R. Acad. Sc., 12 января 1925.

получить, пересекая множество E прямыми $x=x_0$, параллельными оси OY.

Существуют универсальные элементы класса 1. Чтобы в этом убедиться, возьмем последовательность

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots,$$

образованную из всех порций линейной фундаментальной области $\mathcal{J}_y$.

Пусть $\delta=(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ — произвольный интервал Бэра ранга k, лежащий в фундаментальной области $\mathcal{J}_x$. Поставим δ в соответствие множеству E_δ тех точек области двух измерений $\mathcal{J}_{xy}$, абсциссы которых принадлежат к δ, а ординаты y принадлежат к сумме k порций $\pi_{a_1}+\pi_{a_2}+\ldots+\pi_{a_k}$. Ясно, что E_δ есть сумма конечного числа порций двух измерений.

Затем возьмем сумму S всех множеств E_δ таким образом определенных. Легко видеть, что S есть множество класса 1, достижимое снизу. Я утверждаю теперь, что его дополнение $E=CS$ *есть универсальный элемент класса* 1.

Чтобы в этом убедиться, возьмем произвольное линейное множество класса 1, достижимое снизу; пусть e это множество. По определению, e есть сумма $\pi_{a_1}+\pi_{a_2}+\ldots+\pi_{a_n}+\ldots$ счетного множества *различных* порций линейной области $\mathcal{J}_y$. Если мы возьмем иррациональную точку x_0, определенную бесконечной непрерывной дробью

$$x_0=(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots),$$

то легко видеть, что прямая $x=x_0$ пересекает S в точности по e. Следовательно, можно получить всевозможные линейные элементы класса 1, пересекая E прямыми $x=x_0$. Ч. т. д.

Установив это, мы докажем существование в каждом классе K_α универсальных элементов двух измерений. В наших доказательствах мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма. *Если $\mathfrak{E}$ есть плоское множество, лежащее в области $\mathcal{J}_{t,x}$, и если мы преобразуем область $\mathcal{J}_{t,x}$ в новую область $\mathcal{J}_{\tau,x}$ с помощью уравнений*

$$t=\varphi(\tau), \quad x=x,$$

где функция φ непрерывна в $\mathcal{J}_\tau$, то прообраз $\mathfrak{E}'$ множества $\mathfrak{E}$ есть множество, класс которого не превосходит класса $\mathfrak{E}$.

Эта лемма доказывается *трансфинитной индукцией*. Утверждение очевидно, если $\mathfrak{E}$ класса O, так как прообраз порции области $\mathcal{J}_{t,x}$ есть множество класса O, лежащее в $\mathcal{J}_{\tau,x}$.

С другой стороны, каждая последовательность множеств $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_n, \ldots$, имеющая пределом множество $\mathfrak{E}$, преобразуется, очевидно, в сходящуюся последовательность множеств $\mathfrak{E}'_1, \mathfrak{E}'_2, \ldots, \mathfrak{E}'_n$, имеющую пределом прообраз $\mathfrak{E}'$ множества $\mathfrak{E}$. Это замечание завершает доказательство. Ч. т. д.

После того как это доказано, вернемся к *существованию универсальных элементов двух измерений*. Мы предположим, что это существование уже доказано для всех классов, меньших α, и мы докажем, что оно имеет место и для самого класса K_α.

Пусть

$$\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_n, \ldots \tag{1}$$

— последовательность универсальных элементов всех предшествующих классов (кроме K_0), причем каждый из этих геометрических элементов повторяется в последовательности (1) счетное множество раз. Мы предположим, что универсальный элемент $\mathfrak{E}_n$ лежит в области $\mathcal{J}_{t_n,x}$.

Положив это, возьмем последовательность функций

$$t_1 = \varphi_1(\tau), \quad t_2 = \varphi_2(\tau), \ \ldots, \ t_n = \varphi_n(\tau), \ \ldots,$$

непрерывных на области $\mathcal{J}_\tau$ и таких, что, какова бы ни была последовательность иррациональных чисел $t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0$, существует иррациональное число τ^0 такое, что имеют место равенства:

$$t_1^0 = \varphi_1(\tau^0), \quad t_2^0 = \varphi_2(\tau^0), \ \ldots \ ^{1)}.$$

Обозначим через $\mathfrak{E}'_n$ прообраз $\mathfrak{E}_n$ при отображении с помощью уравнения $t_n = \varphi_n(\tau)$, $x = x$. В силу предшествующей леммы, класс множества $\mathfrak{E}'_n$ не превосходит класса $\mathfrak{E}_n$. Тогда сумма S множеств $\mathfrak{E}'_n$ есть множество *либо* класса $< \alpha$, *либо же* достижимое снизу класса α. Мы докажем, что S обладает следующим свойством: каково бы ни было линейное

---

[1]) Здесь идет речь, очевидно, о непрерывной кривой Пеано, заполняющей все пространство счетного числа измерений.

множество e, являющееся *либо* множеством класса $<\alpha$, *либо* достижимым снизу класса α, существует такое иррациональное число τ_0, что прямая $\tau=\tau_0$, параллельная оси OX в области $\mathcal{J}_{\tau, x}$, пересекает S в точности по множеству e.

Действительно, мы имеем $e=e_1+e_2+\ldots+e_k+\ldots$, где e_k есть элемент класса $<\alpha$. В силу самого определения последовательности $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots$ существует иррациональное число $t^0_{n_k}$ такое, что прямая $t_{n_k}=t^0_{n_k}$, параллельная оси OX в области $\mathcal{J}_{t_{n_k}, x}$, пересекает множество $\mathcal{E}_{n_k}$ в точности по e_k. Так как в последовательности универсальных элементов $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots$ каждый член, рассматриваемый как геометрическое множество, повторяется бесчисленное множество раз, то мы можем предположить, что последовательность целых положительных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ возрастающая, и значит, в ней нет одинаковых чисел. При этих условиях в силу предположенного свойства функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ существует иррациональное число τ_0 такое, что $t^0_{n_k}=\varphi_{n_k}(\tau^0)$, каково бы ни было k, и что другие t^0_n, определенные равенствами $t^0_n=\varphi_n(\tau^0)$, таковы, что прямые $t_n=t^0_n$, параллельные оси OX в области $\mathcal{J}_{t_n}$, не пересекают соответствующих универсальных элементов $\mathcal{E}_n$. Если иррациональное число τ^0 определено таким образом, то легко видеть, что прямая $\tau=\tau^0$, параллельная оси OX в области $\mathcal{J}_{\tau, x}$, пересекает S в точности по множеству e.

Отсюда следует, что множество S, так определенное, строго класса α, так как существуют прямые $\tau=\tau_0$, которые пересекают S в точности по линейным множествам класса α, достижимым снизу; *при этом, естественно, предполагается, что такие линейные множества класса K_α существуют.* Легко видеть, что S — *универсальное множество класса* α, *достижимое снизу*, так как, пересекая S прямыми параллельными оси OX, можно получить все линейные множества класса $<\alpha$ и все линейные множества класса K_α, достижимые снизу.

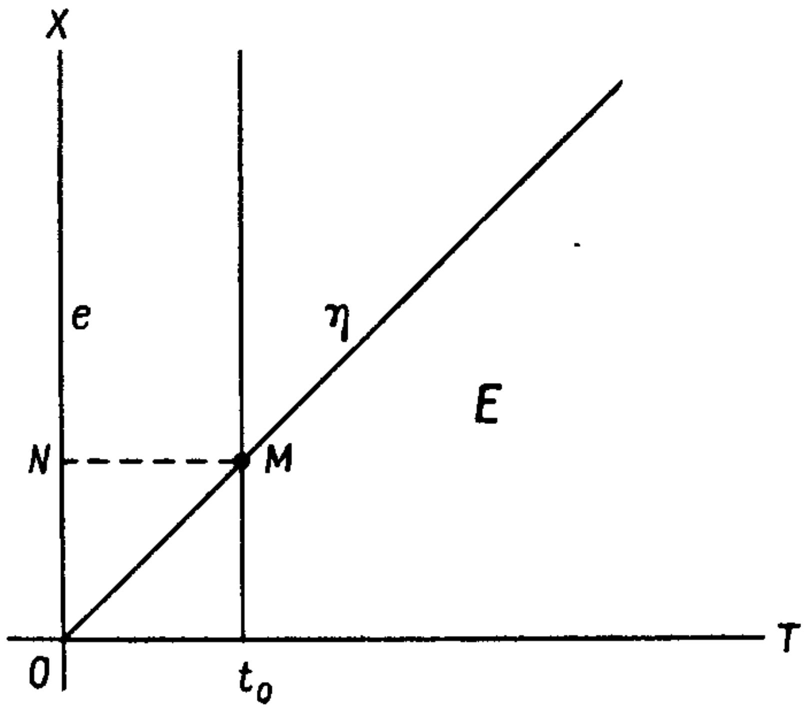
Значит, дополнение E к множеству S есть *универсальный элемент класса* α, и утверждение доказано. Ч. т. д.

Мы дополним этот результат следующим замечанием: *если универсальный элемент E класса α, лежащий в $\mathcal{J}_{t, x}$, пре-*

образован с помощью уравнений $t=\varphi(\tau)$, $x=x$, где функция φ непрерывна на $\mathcal{J}_\tau$, то прообраз $\mathcal{E}$ множества E есть также универсальный элемент класса α, лежащий в области $\mathcal{J}_{\tau,x}$.

Прежде всего, так как прообраз множества класса α есть множество класса $\leqslant\alpha$, то прообраз $\mathcal{E}$ множества E есть или множество класса $<\alpha$, *или* множество класса K_α, достижимое снизу. С другой стороны, очевидно, что, пересекая $\mathcal{E}$ прямыми $\tau=\tau_0$, параллельными оси OX в области $\mathcal{J}_{\tau,x}$, можно получить всевозможные линейные множества класса $<\alpha$ и все достижимые сверху линейные множества класса K_α. Значит, $\mathcal{E}$ — универсальный элемент класса K_α.

Существования. Фундаментальная теорема М. А. Лаврентьева. Мы построили универсальный элемент класса 1 прямым методом, не делая никаких дополнительных гипотез.



Черт. 4.

Далее мы определили множество E, и мы доказали, что оно есть универсальный элемент класса α, *если эффективно существуют линейные множества класса K_α*. Сейчас мы исключим эту гипотезу и докажем непосредственно, что плоское множество E, выше определенное, есть эффективно элемент класса K_α и, следовательно, *что существуют множества всех классов.*

Чтобы в этом убедиться, мы проведем в области $\mathcal{I}_{t,x}$ диагональ $x=t$ и обозначим через η множество точек этой диагонали, не принадлежащих к E.

Пусть e — проекция η на ось OX. Мы начнем с доказательства того факта, что e не может быть получено в результате пересечения E какой-либо прямой $x=x_0$, параллельной оси OX.

В самом деле, пусть t_0 — точка области $\mathcal{I}_t$ такая, что прямая $t=t_0$ пересекает E по e. Рассмотрим точку M диагонали, лежащую на прямой $t=t_0$. Возможны два случая.

В первом случае точка M принадлежит к E. Так как прямая $t=t_0$ пересекает E по e, то проекция N точки M принадлежит к e. С другой стороны, e есть проекция множества η, состоящего из точек дополнения CE, принадлежащих диагонали. Значит, M принадлежит к CE, что противоречит предположению.

Во втором случае точка M принадлежит к CE. В этом случае проекция N точки M принадлежит к e. Но множество e есть проекция точек E, лежащих на прямой $t=t_0$. Значит, M принадлежит к E, и мы опять получили противоречие.

Установив это, покажем, что определенное нами множество E принадлежит классу K_α. В силу самого определения E всякое линейное множество класса $<\alpha$ может быть получено в результате пересечения E прямой $t=t_0$, параллельной оси OX. Если бы множество E было само класса $<\alpha$, то это имело бы место и для пересечения E с диагональю $x=t$. При этих условиях множество η было бы класса $<\alpha$, *так же как и его проекция e на ось OX*. Тогда множество e можно было бы получить, пересекая E некоторой прямой $t=t_0$, что заведомо невозможно.

Итак, множество E — строго класса α и, следовательно, *существуют множества всех классов*.

Читатель заметил, что в этом доказательстве мы исходили из некоторого частного (однако, произвольного) пересчета всех трансфинитных чисел, меньших α при помощи целых положительных чисел. Этот пересчет вошел в последовательность (1):

$$\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2,\ \ldots,\ \mathcal{E}_n,\ \ldots, \tag{1}$$

состоящую из универсальных элементов всех классов, предшествующих α. Итак, мы можем доказать существование элемента E каждого *данного* класса α, так как мы умеем получить конструкцию E из пересчета всех чисел, меньших α, с помощью целых положительных чисел.

Но мы не умеем назвать семейства элементов всех классов, в котором содержался бы один и только один элемент каждого класса, так как это предполагало бы (если ограничиваться предшествующим методом) ***возможность назвать единственный пересчет трансфинитных чисел, предшествующих каждому трансфинитному числу α.***

Мы думаем, что такой пересчет невозможен [11].

Перейдем теперь к доказательству фундаментальной теоремы М. А. Лаврентьева о существовании множеств всех подклассов.

Вот метод М. А. Лаврентьева.

Мы берем формально класс α и один из его подклассов β. Каждое линейное множество e, принадлежащее этому подклассу, может быть представлено в форме

$$e = S + R,$$

где S есть сумма счетного множества элементов класса $< \alpha$, а R — *рассеянное* счетное множество элементов класса α; это последнее множество вполне упорядочено и имеет β соответствующим трансфинитным числом.

Таким образом, мы можем написать:

$$e = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots) + \\ + (\eta_0 + \eta_1 + \ldots + \eta_\omega + \ldots + \eta_\gamma + \ldots) \mid \beta \qquad (1)$$

и поставить в соответствие этому разложению трансфинитную последовательность

$$H_0, H_1, \ldots, H_\omega, \ldots, H_\gamma, \ldots \mid \beta,$$

где каждое ε_n класса $< \alpha$ и η_γ — элемент класса α; отделяющее множество H_γ класса $< \alpha$ содержит η_γ и не содержит ни одной точки из элементов $\eta_{\gamma'}$, следующих за η_γ, $\gamma' > \gamma$.

Всякое множество e класса α и подкласса β может быть представлено в форме (1), и *обратно*: каждое линейное точечное множество e, представленное в форме (1), есть очевидно: *или* класса $<\alpha$, *или же* класса α и подкласса $\leqslant\beta$.

Удобно написать разложение (1) в следующей форме:

$$e=\eta_0+\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_\omega+\ldots+\eta_\gamma+\ldots|\beta, \tag{2}$$

где η_γ — *или* элемент класса $<\alpha$, *или* же элемент в точности класса α.

Мы запишем также соответствующую трансфинитную последовательность отделяющих множеств в форме

$$H_0,\ H_1,\ \ldots,\ H_\omega,\ \ldots,\ H_\gamma,\ \ldots|\beta,$$

где H_γ совпадает с η_γ, если класс η_γ меньше, чем α, если же η_γ есть элемент класса α, то множество H_γ класса $<\alpha$ содержит η_γ и не содержит ни одной точки из элементов $\eta_{\gamma'}$, которые следуют за η_γ, $\gamma'>\gamma$.

Легко видеть, что обратное также имеет место: если какое-нибудь линейное множество e представлено в форме (2), то это множество *либо* класса $<\alpha$, *либо* класса α и подкласса $\leqslant\beta$.

Доказав это, мы поставим в соответствие каждой простой бесконечной последовательности элементов класса $<\alpha$,

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n,\ \ldots$$

и каждому трансфинитному числу β линейное множество e. Для этого пересчитаем все конечные и трансфинитные числа γ, меньшие β, при помощи целых *нечетных* чисел 1, 3, 5, ..., $2n-1$, ... и запишем соответствующие e_1, e_3, e_5, ..., e_{2n-1} ... в трансфинитную последовательность

$$H_0,\ H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_\omega,\ \ldots,\ H_\gamma,\ \ldots|\beta,$$

где каждое H_γ есть то множество e_{2n-1}, номер которого $2n-1$ соответствует трансфинитному числу γ.

Определим теперь множество e следующим трансфинитным разложением:

$$e=\eta_0+\eta_1+\ldots+\eta_\omega+\ldots+\eta_\gamma+\ldots|\beta, \tag{3}$$

где η_γ есть множество, определенное формулой

$$\eta_\gamma = H_\gamma \cdot C \sum_{\lambda < \gamma} H_\lambda \prod_{k=1}^{\infty} Ce_{2^n (2k-1)}.$$

Очевидно, что множество η_γ, таким образом определенное, есть *или* класса $< \alpha$ *или* из базы B_α, *или же* элемент класса α. С другой стороны, η_γ содержится в H_γ, а H_γ — множество класса $< \alpha$, не имеющее общих точек с $\eta_{\gamma'}$, где $\gamma' > \gamma$. Следовательно, множество e, таким образом определенное, есть *или* класса $< \alpha$, *или же* класса α и подкласса $\leqslant \beta$.

Нужно заметить, что каждое линейное множество e, которое есть *или* класса $< \alpha$, *или же* класса α и подкласса $\leqslant \beta$, может быть получено таким способом при надлежащем выборе множеств $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ В самом деле, так как e_n — *произвольные* элементы класса $< \alpha$, то множитель

$$\prod_{k=1}^{\infty} Ce_{2^n (2k-1)}$$

есть произвольный элемент класса α или произвольное множество из базы B_α, или же произвольное множество класса $< \alpha$. С другой стороны, в определении рассеянного множества каждое множество H_γ класса $< \alpha$, отделяющее η_γ от последующих элементов, может всегда быть разложено на *элементы* классов, не превосходящих класса H_γ. Следовательно, мы можем всегда считать, что отделяющие множества суть *элементы* класса $< \alpha$.

Отсюда следует, что множество e, определенное равенством (3), может совпадать с каждым множеством класса α и подкласса $\leqslant \beta$.

Предположим теперь, что последовательность

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

состоит из универсальных элементов всех классов $< \alpha$, причем каждый элемент повторяется в этой последовательности бесчисленное множество раз. Очевидно, что множество e, определенное с помощью этой последовательности и данного трансфинитного числа β, есть множество или класса $< \alpha$, или же класса α и подкласса $\leqslant \beta$. Но класс множества e не может быть меньше α, так как, пересекая e прямыми параллельными оси ординат, можно получить всевозможные линейные множества класса α и подкласса $\leqslant \beta$ и, в частности, все элементы класса α [1]).

Следовательно, класс e равен α.

Установив это, пересечем множество e диагональю $x = t$. Так как класс e равен α, то множество точек диагонали, не принадлежащих к e, есть множество класса $\leqslant \alpha$. Отсюда следует, что и его проекция на ось OX есть множество класса $\leqslant \alpha$. Нужно заметить, что это линейное множество не может быть класса $< \alpha$, так как в противном случае его можно было бы получить, пересекая e какой-то прямой $t = t_0$, что невозможно.

Следовательно, это линейное множество есть множество класса α.

Оно не может также быть подкласса $\leqslant \beta$, потому что в этом случае его можно было бы получить, пересекая e какой-то прямой $t = t_0$.

Отсюда следует, что e есть множество класса α и подкласса $> \beta$, что доказывает существование сколь угодно высоких подклассов [[12]].

---

[1]) Для этого достаточно, чтобы, какова бы ни была последовательность $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_n, \ldots$ линейных элементов классов $< \alpha$, нашлась прямая $x = x_0$, которая пересекает каждый универсальный элемент e_n по множеству $\mathfrak{E}_n$, т. е. чтобы последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ совпадала с последовательностью универсальных элементов. (*Прим. ред.*)

ГЛАВА III

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА

Определения и простейшие свойства

Линейные аналитические множества. Мы видели (стр. 114), что всякое несчетное множество E, измеримое B, расположенное в области $\mathcal{J}_x$, допускает регулярное параметрическое изображение

$$x = f(t)$$

при помощи функции f, *непрерывной* на $\mathcal{J}_t$, если пренебрегать счетным множеством точек множества E.

Это значит, что множество E (с точностью до счетного множества точек) можно рассматривать как множество значений, принимаемых на порции (0,1) функцией $f(t)$, непрерывной на $\mathcal{J}_t$, причем условие *регулярности* f заключается именно в том, что функция $f(t)$ никогда не принимает двух равных значений; следовательно, если $t' \neq t''$, то

$$f(t') \neq f(t'').$$

В этой главе мы изучим свойство множеств, которые получаются устранением условия регулярности, наложенного на изображающую функцию $f(t)$.

Определение. *Мы назовем аналитическим всякое множество, которое допускает параметрическое изображение $x = f(t)$ при помощи функции, непрерывной на $\mathcal{J}_t$*[1]).

---

1) Это определение тождественно с теоремой I моей заметки, касающейся аналитических множеств и опубликованной в Comptes Rendus Acad. Sc. 8 января 1917 г.

Смысл этого названия совершенно ясен: так как всякая функция

$$x = f(t),$$

непрерывная на $\mathcal{J}_t$ (по отношению к этой области), есть функция 1-го класса по классификации Бэра, то существует *ряд многочленов относительно t* с рациональными коэффициентами [1])

$$P_1(t) + P_2(t) + \ldots + P_n(t) + \ldots,$$

сходящийся для всех значений t на (0,1) и имеющий суммой функцию $f(t)$. Следовательно, всякое линейное аналитическое множество есть множество значений, принимаемых на (0,1) суммой ряда многочленов с рациональными коэффициентами, а потому оно определено при помощи аналитического равенства [[13]].

Мы хотим обратить внимание на тот важный факт, что в определении аналитического множества изображающая функция $f(t)$ может принимать равные значения. Мы скоро увидим, что этот факт дает определению аналитического множества очень большую широту.

Рассмотрим теперь несколько простых примеров множеств, которые являются аналитическими в вышеуказанном смысле.

Прежде всего, точка области $\mathcal{J}_x$, *отдельно взятая*, есть аналитическое множество: достаточно принять *постоянную величину* за изображающую функцию $f(t)$.

Отсюда следует, что всякое счетное множество точек есть аналитическое множество: достаточно принять за $f(t)$ функцию, равную соответствующим образом выбранной

---

[1]) И даже с целыми коэффициентами, так как *всякая функция первого класса, определенная* на $(0 < x < 1)$, *исключая концы этого интервала, разлагается в ряд многочленов с целыми коэффициентами*. Это теорема И. Н. Хлодовского. См. его заметку в Матем. Сборнике, т. 32, 1925 г.

Кроме того, мы можем предположить, что ряд многочленов $P_1(t) + P_2(t) + \ldots$ *абсолютно* сходится, причем этого можно достигнуть, не уменьшая общности данного определения аналитического множества. См. мой Mémoire sur les ensembles analytiques et projectifs в Матем. Сборн., т. 33, 1926 г., стр. 266. См. также работу Серпинского «Les ensembles analytiques et les fonctions semi-continues», Cracovie, 1927.

постоянной величине в каждом интервале Бэра 1-го ранга области $\mathcal{J}_x$.

Пусть теперь E есть линейное множество, измеримое B. Если E счетно (или конечно), мы уже видели, что E — аналитическое. Если E несчетно, то, по доказанному на стр. 114, множество E может быть разложено следующим образом:

$$E = E_1 + D,$$

где E_1 допускает нормальное изображение, а D счетно (или конечно). Сделав непрерывное параметрическое изображение E_1 на порции $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и D на порции $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, мы, очевидно, придем к непрерывному параметрическому изображению всего множества E на $(0, 1)$.

Итак, *всякое линейное множество, измеримое B, есть аналитическое множество.*

Следовательно, семейство аналитических множеств содержит семейство множеств, измеримых B [1]).

Аналитические множества нескольких измерений. Аналогичным образом мы назовем *аналитическим* всякое множество точек E, расположенное в m-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ и *допускающее непрерывное параметрическое изображение*: это значит, что множество E есть геометрическое место последовательных положений движущейся точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которой являются функциями некоторого переменного параметра t, причем эти функции определены и непрерывны на порции $(0,1)$ области $\mathcal{J}_t$

$$x_1 = f_1(t), \ x_2 = f_2(t), \ \ldots, \ x_m = f_m(t).$$

Мы видим, что это определение есть вполне естественное обобщение понятия *линейного* аналитического множества [2]).

Все замечания, которые мы сделали по поводу линейных аналитических множеств, немедленно применяются и

---

[1]) Суслин вывел это предложение из того факта, что семейство аналитических множеств инвариантно относительно двух операций: суммирования в широком смысле и взятия общей части. См. теорему I его заметки в Comptes Rendus, т. 164 (1917).

[2]) См. мою заметку в Comptes Rendus Acad. Sc. в мае 1925 г. и мой мемуар «Sur les ensembles analytiques», Fund. Math. 1926, т. X, стр. 20.

к аналитическим множествам многих измерений. В частности, *всякое множество, измеримое B, в многомерном пространстве есть аналитическое множество.*

Простейшие свойства аналитических множеств: сумма и общая часть. Мы докажем первое основное свойство аналитических множеств:

Теорема. *Сумма счетного множества аналитических множеств есть аналитическое множество*[1].

Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ — бесконечная последовательность аналитических множеств. Разделим (0,1) области $\mathcal{J}_t$ на интервалы Бэра 1-го ранга: (1), (2), (3), ..., (n), ... и изобразим параметрически E_n на интервале Бэра (n). Ясно, что таким образом мы получим непрерывное параметрическое изображение суммы $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ на (0,1). Итак, эта сумма есть аналитическое множество. Ч. т. д.

Здесь надлежит сделать следующее замечание: можно формально изобразить множество точек в пространстве многих измерений при помощи *одной и только одной функции*, если ввести комплексные числа с m мнимыми единицами $a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_m i_m$ и условиться писать

$$a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_m i_m = b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots + b_m i_m,$$

когда имеем в отдельности $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_m = b_m$, так что одно уравнение между комплексными числами сводится к m уравнениям с действительными числами. В этих условиях всякое аналитическое множество E в пространстве m измерений изображается при помощи одной и только одной комплексной функции

$$f(t) = f_1(t)\, i_1 + f_2(t)\, i_2 + \ldots + f_m(t)\, i_m$$

действительного параметра t, причем эта функция определена и непрерывна на порции (0,1) области $\mathcal{J}_t$.

Это замечание будет нам часто полезно, так как большинство рассуждений, касающихся линейных аналитических множеств, сохранится в силе для многомерных аналитических множеств, если ввести комплексные функции.

---

[1]) Эта теорема принадлежит Суслину. См. его лемму II в цитированной заметке (Comptes Rendus Acad. Sc., 8 января 1917 г.).

Теорема. *Общая часть счетного множества аналитических множеств есть аналитическое множество*[1].

Пусть E есть общая часть аналитических множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ и пусть

$$x = f_1(t_1),\ x = f_2(t_2),\ \ldots,\ x = f_n(t_n),\ \ldots$$

— непрерывные параметрические изображения этих множеств на порциях (0,1) соответствующих областей $\mathcal{J}_{t1}, \mathcal{J}_{t_2}, \ldots$ $\ldots, \mathcal{J}_{t_n}, \ldots$

Определим новую область $\mathcal{J}_t$ и возьмем уравнения

$$t_1 = \varphi_1(t),\ t_2 = \varphi_2(t),\ \ldots,\ t_n = \varphi_n(t),\ \ldots,$$

которыми мы пользовались при доказательстве теоремы о существовании нормального изображения для всякого несчетного множества, неизмеримого B (стр. 115).

Эти функции $\varphi_n(t)$ непрерывны на (0,1) области $\mathcal{J}_t$ и принимают иррациональные значения, заключенные между 0 и 1. Кроме того, какова бы ни была последовательность $t_1^0, t_2^0, \ldots$ $\ldots, t_n^0, \ldots$ иррациональных чисел, заключенных между 0 и 1, существует одно и только одно иррациональное число t_0 такое, что значения функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ в t_0 соответственно равны $t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0, \ldots$

Установив это, образуем сложные функции

$$F_1(t) = f_1[\varphi_1(t)],\quad F_2 = f_2[\varphi_2(t)],\ \ldots,\ F_n(t) = f_n[\varphi_n(t)], \ldots$$

Ясно, что эти функции непрерывны на (0,1). Следовательно, совместные уравнения

$$F_1(t) = F_2(t) = \ldots = F_n(t) = \ldots$$

определяют замкнутое на $\mathcal{J}_t$ множество T.

---

[1]) Эта теорема принадлежит Суслину. См. лемму III в его заметке (Comptes Rendus Acad. Sc. 8 января 1917 г.). Метод Суслина, основанный на употреблении кортежей индексов (см. стр. 303 этой книги), существенно отличается от того, который мы даем в тексте. Я указал метод, даваемый в тексте, в своем мемуаре «Sur les ensembles analytiques», Fund. Math., т. X, 1926, стр. 40), он полезен во многих случаях и, в частности, применяется к проективным множествам. См. стр. 279 этой книги и работу Серпинского «Sur les produits des images continues».

Из определения сложных функций F_i следует, что когда переменное t пробегает множество T, то общая величина функций $F_i(t)$, которую мы обозначим просто через $F(t)$, пробегает в точности общую часть $E_1 \cdot E_2 \ldots E_n \ldots$ заданных множеств.

Но замкнутое множество T измеримо B. Следовательно, T есть аналитическое множество, а потому существует непрерывное параметрическое изображение

$$t = \psi(\tau)$$

множества T на порции $(0,1)$ новой области $\mathcal{J}_\tau$, причем функция $\psi(\tau)$ определена и непрерывна на $(0,1)$ области $\mathcal{J}_\tau$.

Отсюда следует, что сложная функция

$$x = F[\psi(\tau)] = \Phi(\tau)$$

дает искомое непрерывное параметрическое изображение множества $E = E_1 \cdot E_2 \ldots E_n \ldots$ Значит, это множество есть аналитическое. Ч. т. д.

Важно заметить, что данное доказательство, проведенное для линейных аналитических множеств, остается без изменений для множеств многих измерений, если предположить, что изображающие функции $x = f_n$ комплексные и что буква x обозначает точку множества E_n. Остальные функции φ_n и ψ должны оставаться действительными.

Проекции

Элементарные множества. Рассмотрим основную область m измерений $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$. Разделим каждую линейную область $\mathcal{J}_{x_1}$ на порции при помощи целых чисел; каждая из полученных порций имеет длину, равную 1, и мы их назовем *интервалами Бэра порядка* 0. В каждом из них мы определим интервалы Бэра порядков 1, 2, 3, ..., в точности так, как это обычно делается для порции $(0,1)$.

Установив это, мы назовем *параллелепипедом Бэра* порядка k в m-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ множество тех точек этой области, координаты которых принадлежат каким-нибудь интервалам Бэра порядка k, например $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$, расположенным соответственно в $\mathcal{J}_{x_1}, \mathcal{J}_{x_2}, \ldots, \mathcal{J}_{x_m}$.

Мы теперь введем очень полезное понятие, а именно понятие *элементарного множества.*

С этой целью возьмем в области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ определенную счетную или конечную последовательность параллелепипедов Бэра порядка 0 попарно без общих точек: эти параллелепипеды Бэра назовем *параллелепипедами ранга* 0.

В каждом параллелепипеде ранга 0 возьмем вполне определенную, счетную или конечную, последовательность параллелепипедов Бэра порядка 1 и попарно без общих точек: эти параллелепипеды назовем *параллелепипедами ранга* 1.

Вообще, каково бы ни было n, $n > 1$, возьмем в каждом из параллелепипедов Бэра ранга $n - 1$ вполне определенную, конечную или счетную, последовательность параллелепипедов Бэра порядка n попарно без общих точек; мы их назовем *параллелепипедами ранга n.*

Так как всех параллелепипедов Бэра лишь счетное множество (или конечное число), то их сумма есть множество, измеримое B; обозначим его через S_n. Следовательно, общая часть $\mathfrak{E}$ всех сумм S_n

$$\mathfrak{E} = S_1 \cdot S_2 \ldots S_n \ldots$$

есть опять множество, измеримое B.

Определение. *Мы назовем элементарным множеством так определенное множество* $\mathfrak{E}$.

Легко видеть, что всякое элементарное множество есть множество не очень сложной природы, но, строго говоря, это лишь очень относительно [1]).

Установив это определение, мы докажем следующую теорему:

Теорема. *Всякое аналитическое множество, расположенное в области m измерений, есть ортогональная проекция некоторого элементарного множества, расположенного в области $m+1$ измерений.*

---

[1]) «Простота» элементарных множеств нам кажется весьма иллюзорной. Перевод определения элементарного множества на язык арифметики наталкивается на все препятствия, связанные с теорией роста. Повидимому, все трудности теории проективных множеств содержатся, как в зародыше, в теории элементарных множеств.

Чтобы доказать это, возьмем аналитическое множество E, содержащееся в области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$. Пусть

$$x_1 = f_1(t),\ x_2 = f_2(t),\ \ldots,\ x_m = f_m(t) \tag{1}$$

есть непрерывное параметрическое изображение E.

Рассмотрим данную область $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ как часть новой области $m+1$ измерений $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_mx_{m+1}}$. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество точек $N(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ этой области, координаты которых удовлетворяют уравнениям (1). Ясно, что ортогональная проекция $\mathcal{E}$ на область $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ есть данное множество E.

Итак, все сводится к доказательству того, что $\mathcal{E}$ есть элементарное множество.

С этой целью рассмотрим интервал Бэра δ порядка k, расположенный в $\mathcal{J}_t$. Пусть $\mathcal{E}_\delta$ есть множество тех точек из $\mathcal{E}$, у которых координата t принадлежит δ. Обозначим через $S_\delta^{(k)}$ сумму тех параллелепипедов Бэра порядка k в области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_mt}$, которые содержат точки из $\mathcal{E}_\delta$. Сумма всех $S_\delta^{(k)}$, соответствующих интервалам Бэра порядка k, будет обозначена через S_k.

Легко видеть, что общая часть $\mathcal{E}' = S_1 \cdot S_2 \ldots S_k \ldots$ есть элементарное множество, содержащее множество $\mathcal{E}$. Остается лишь доказать что $\mathcal{E}'$ содержится в $\mathcal{E}$.

Чтобы убедиться в этом, возьмем точку $N(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, t_0)$ из $\mathcal{E}'$. Пусть π_ν есть параллелепипед Бэра порядка ν, содержащий точку N. Если мы будем изменять ν, мы получим бесконечную последовательность $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_\nu, \ldots$ параллелепипедов Бэра порядков $0, 1, 2, \ldots, \nu, \ldots$, содержащих точку N, каждый из которых содержится в предыдущем. Если мы обозначим через δ_ν проекцию π_ν на ось OT, то последовательность $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu, \ldots$ образована из интервалов Бэра порядков $0, 1, 2, \ldots, \nu, \ldots$, содержащих точку t_0, каждый из которых содержится в предыдущем. Так как параллелепипед π_ν есть часть суммы $S_\delta^{(\nu)}$, то он содержит точки множества $\mathcal{E}_{\delta_\nu}$. Значит, интервал Бэра δ_ν обязательно содержит точку t_ν, такую, что точка N_ν с координатами $x_1^{(\nu)}$, $x_2^{(\nu)}, \ldots, x_m^{(\nu)}, t_\nu$, удовлетворяющими уравнениям

$$x_1^{(\nu)}=f_1(t_\nu),\ x_2^{(\nu)}=f_2(t_\nu),\ \ldots,\ x_m^{(\nu)}=f_m(t_\nu), \tag{2}$$

принадлежит к π_ν.

Если мы будем неограниченно увеличивать ν, то t_ν будет стремиться к t_0. С другой стороны, каждое $x_i^{(\nu)}$ стремится к x_i^0, так как диаметр параллелепипеда π_ν, содержащего постоянную точку N и переменную точку N_ν, стремится к нулю с возрастанием ν.

Так как функции $f_i(t)$ непрерывны, то уравнения (2) нам дают

$$x_1^0=f_1(t_0),\ x_2^0=f_2(t_0),\ \ldots,\ x_m^0=f_m(t_0),$$

откуда и следует, что точка N принадлежит к $\mathfrak{E}$. Итак, множество $\mathfrak{E}'$ тождественно с $\mathfrak{E}$ и, следовательно, $\mathfrak{E}$ есть элементарное множество. Ч. т. д.

Обратная теорема также имеет место: *ортогональная проекция всякого аналитического множества есть также аналитическое множество*[1]).

Чтобы доказать эту теорему, возьмем в m-мерной области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ аналитическое множество E, заданное непрерывным параметрическим изображением

$$x_1=f_1(t),\ x_2=f_2(t),\ \ldots,$$
$$x_{m'}=f_{m'}(t),\ \ldots,\ x_m=f_m(t).$$

Чтобы получить ортогональную проекцию E на m'-мерную область $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_{m'}}$, $m'<m$, очевидно, достаточно отбросить уравнения, которые следуют за $x_{m'}=f_{m'}(t)$; это дает

$$x_1=f_1(t),\ x_2=f_2(t),\ \ldots,\ x_{m'}=f_{m'}(t).$$

Итак, проекция E есть аналитическое множество. Ч. т. д.

Эта теорема имеет большое значение, так как она показывает, что операция взятия ортогональной проекции уже определенного множества не выводит из класса аналитических

---

[1]) См. теорему VI заметки Суслина (Comptes Rendus Acad. Sc., 8 января 1917 г.).

множеств. В частности, взяв ортогональную проекцию множества, измеримого B, мы получаем аналитическое множество. А так как каждое аналитическое множество есть проекция некоторого элементарного множества, т. е. множества, измеримого B (элемента класса 2), то мы заключаем отсюда, что *аналитические множества тождественны проекциям множеств, измеримых* B.

Параметрическое изображение при помощи функций, входящих в классификацию Бэра. Мы определили аналитическое множество как множество, которое допускает *непрерывное* параметрическое изображение

$$x_1 = f_1(t),\ x_2 = f_2(t),\ \ldots,\ x_m = f_m(t).$$

Но непрерывные на $\mathcal{J}_t$ функции суть функции класса 0 по классификации Бэра[1]). Поэтому вполне естественно теперь изучить природу тех множеств, которые допускают непрерывное параметрическое изображение при помощи любых функций классификации Бэра.

В наших рассуждениях мы будем пользоваться следующей теоремой, принадлежащей Лебегу: *Множество тех точек области* $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, *в которых функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *входящая в классификацию Бэра, равна нулю, есть всегда множество, измеримое* B[2]).

Другое свойство функций классификации Бэра, которым мы будем пользоваться, состоит в следующем: *суммы, раз-*

---

[1]) Согласно условию рассматривать всегда лишь иррациональные точки, мы назовем *функциями класса* 0 функции, непрерывные *на области* $\mathcal{J}_t$ *относительно этой области.* Ясно, что функция класса 0 в смысле этого определения будет класса $\leqslant 1$ в обычной классификации Бэра, где рациональные точки не исключаются. Заметим, что такие переходы могут происходить лишь в классах 0 и 1, высшие же классы $\geqslant 2$ остаются неизменными.

[2]) Это частный случай общей теоремы Лебега: *для того чтобы функция* f, *всюду определенная, была класса не выше* α, *необходимо и достаточно, чтобы, каковы бы ни были рациональные числа* r_1 и r_2, *множество точек, где* $r_1 \leqslant f \leqslant r_2$, *было класса не выше* α. (Sur les fonctions représentables analytiquenent, стр. 168, теорема V.)

Доказательство этой теоремы построено на трансфинитной индукции. В случае текста мы имеем $r_1 = r_2 = 0$.

ности и произведения функций классификации Бэра входят в ту же классификацию[1]).

Эти теоремы можно доказать *методом индукции*: теорема очевидна для класса 0; затем доказывают, что если она верна для классов $< \alpha$, то верна и для класса α.

Мы не будем больше останавливаться на этом пункте.

Установив это, вернемся к изучению множества E, определенного параметрическим изображением (1), в котором функции f_i входят в классификацию Бэра.

Рассмотрим функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ от $m+1$ действительных переменных, определенную равенством

$$F = [x_1 - f_1(t)]^2 + [x_2 - f_2(t)]^2 + \ldots + [x_m - f_m(t)]^2.$$

Так как функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ входят в классификацию Бэра, то и функция F также в нее входит. Следовательно, множество $\mathcal{E}$ точек $N(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ $m+1$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m t}$, где функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ обращается в нуль, измеримо B. Но множество $\mathcal{E}$ есть как раз множество тех точек N, координаты которых удовлетворяют уравнениям (1). В этих условиях ясно, что ортогональная проекция $\mathcal{E}$ на область $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ есть множество E. Значит, E есть *аналитическое множество*.

Таким образом, мы приходим к следующему заключению:

Понятие аналитического множества нисколько нельзя расширить, рассматривая геометрическое место последовательных положений подвижной точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, координаты которой суть произвольные функции параметра t, входящие в классификацию Бэра[2])

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \ldots, x_m = f_m(t).$$

Универсальное аналитическое множество. Мы видели, что семейство аналитических множеств содержит семейство множеств, измеримых B. Чтобы решить вопрос о том,

---

[1]) См. Lebesgue, там же, стр. 153.

[2]) Это теорема III моей заметки в Comptes Rendus Acad. Sc. 8 января 1917 г.

выходят ли аналитические множества за пределы множеств, измеримых B, мы введем следующее определение [1]):

Аналитическое множество E точек двумерной области $\mathcal{J}_{xy}$ мы назовем универсальным, если, пересекая его прямыми $x = x_0$, параллельными оси OY, мы получим всевозможные линейные аналитические множества.

Легко доказать существование универсальных аналитических множеств.

С этой целью заметим, прежде всего, что всякое элементарное множество будет *или* класса <2 или же элементом класса 2. Это вытекает из самого определения элементарного множества (стр. 140), так как если E — элементарное множество, то оно является общей частью $E = S_1 \cdot S_2 \ldots S_n \ldots$ сумм S_n, каждая из которых образована из счетного множества параллелепипедов Бэра [14].

Но мы видели (стр. 126), что существуют универсальные элементы каждого класса α классификации Валле-Пуссена и притом в пространстве любого числа измерений. Возьмем же в трехмерной области $\mathcal{J}_{xyz}$ универсальный элемент класса 2. В силу свойства универсальных элементов, пересекая $\mathcal{E}$ плоскостями $y = \text{const}$, параллельными плоскости XOZ, мы получим всевозможные плоские элементы класса 2. В частности, получаются всевозможные элементарные множества.

Пусть теперь E есть ортогональная проекция универсального элемента $\mathcal{E}$ на плоскость YOZ. Так как $\mathcal{E}$ измеримо B, то его проекция E есть плоское аналитическое множество.

Я утверждаю, что E есть *универсальное* анилитическое множество. В самом деле, каково бы ни было линейное аналитическое множество e, оно является ортогональной проекцией некоторого плоского элементарного множества. И так

---

[1]) Я ввел понятие универсального аналитического множества в своей заметке «Sur les ensembles non mesurables B et l'emploi de la diagonale de Cantor» (Comptes Rendus Acad. Sc. 20 июля 1925 г.), но идея плоского множества, универсального по отношению к данному семейству множеств, была у Лебега (Sur les fonctions représentables analytiquement», стр. 207). Относительно других приложений понятия универсального множества см. извлечение из моего письма к Серпинскому, «Sur l'accessibilité des points» (Fund. Math. m. XI) и интересные работы Серпинского «Sur l'existance des diverses classes d'ensembles» (Fund. Math. т. XIV) и Никодима «Sur les diverses chasses d'ensembles» (Fund. Math. т. IV).

как мы можем получить это элементарное плоское множество, пересекая элемент $\mathfrak{E}$ подходяще выбранной плоскостью $y=y_0$, то мы получим линейное аналитическое множество e, пересекая E прямой $y=y_0$, параллельной оси OZ и лежащей в плоскости YOZ. Это показывает нам, что E есть плоское универсальное аналитическое множество.

Принимая во внимание всю важность существования универсальных аналитических множеств, мы дадим другое доказательство, с некоторых точек зрения более простое, чем предыдущее [1]).

Метод, который мы сейчас изложим, основан на пользовании функцией $\varphi(x, t)$, обладающей следующими двумя свойствами: 1° она определена для всех x и t, принадлежащих интервалу $(0, 1)$, и входит в классификацию Бэра; 2° всякая функция $f(x)$ переменного x и класса $\leqslant 1$ может быть получена, если дать переменному t некоторое частное числовое значение t_0.

В самом деле, возьмем функцию $\varphi(x, t)$, обладающую указанными двумя свойствами, и рассмотрим в трехмерном пространстве $OXTY$ поверхность S, определенную уравнением

$$y=\varphi(x, t).$$

Если эту поверхность S рассматривать как множество точек в пространстве $OXTY$, то это множество, очевидно, измеримо B.

Следовательно, ортогональная проекция S на плоскость TOY есть *аналитическое* множество; обозначим эту проекцию через E. Я теперь утверждаю, что E есть *универсальное* аналитическое множество.

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что всякая функция $f(x)$, непрерывная во всех иррациональных точках, необходимо будет класса $\leqslant 1$ по классификации Бэра. Поэтому, по самому определению линейного аналитического множества, мы получим все линейные аналитические множества, пересекая E прямыми, параллельными оси OY. Отсюда следует, что E есть универсальное аналитическое множество.

Итак, все сводится к построению такой функции $\varphi(x, t)$. Пусть $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x), \ldots$ есть последовательность,

---

[1]) См. мою заметку в Comptes Rendus Acad. Sc. 20 июля 1925 г.

образованная из всех многочленов относительно x с рациональными коэффициентами, и пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots$ есть последовательность функций, непрерывных между 0 и 1 и обладающих следующим свойством: какова бы ни была последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, существует такое число t_0, что

$$a_1 = \varphi_1(t_0), \quad a_2 = \varphi_2(t_0), \ldots, a_n = \varphi_n(t_0), \ldots$$ [1])

Установив это, обозначим через $S_n(x, t)$ сумму n первых членов бесконечного ряда

$$P_1(x)\varphi_1(t) + P_2(x)\varphi_2(t) + \ldots + P_n(x)\varphi_n(t) + \ldots$$

Ясно, что $S_n(x, t)$ есть непрерывная функция по совокупности своих аргументов. Следовательно, функция $\varphi(x, t)$, определенная как верхний предел

$$\varphi(x, t) = \overline{\lim_{n\to\infty}} S_n(x, t),$$

есть функция класса 2 по классификации Бэра. А так как каждая функция класса $\leqslant 1$ может быть представлена в виде суммы ряда многочленов с рациональными коэффициентами, то мы видим, что так определенная функция $\varphi(x, t)$ обладает двумя вышеуказанными свойствами [2]). Ч. т. д.

Установив этот результат, возьмем плоское универсальное аналитическое множество E, расположенное в плоскости XOY. Так как E универсально, то мы получим *все* линейные аналитические множества и среди них *все* линейные множества, измеримые B, пересекая E прямыми $x = x_0$, параллельными оси OY. Рассмотрим *диагональ* $y = x$ и обозначим через e общую часть универсального аналитического множества E и этой диагонали. Ясно, что e есть линейное аналитическое множество.

Но если мы обратимся к рассуждению по поводу диагонали, сделанному выше (стр. 130), мы немедленно заметим,

---

[1]) Речь идет о кривой Пеано, заполняющей целую область в пространстве счетного числа измерений.

[2]) Отметим интересную работу В. Серпинского «Sur un ensemble analytique universel pour les ensembles mesurables B» (Fund. Mathem. т. XII, стр. 75), где Серпинский строит плоское аналитическое множество, которое параллелями к оси OY пересекается *только* по множествам, *измеримым* B, и *каждое* линейное множество, измеримое B, может быть получено таким способом.

что ортогональная проекция на ось OY дополнения Ce к множеству e относительно диагонали $y=x$ не может принадлежать к семейству тех множеств, которые получаются при пересечении E прямыми $x=x_0$.

Следовательно, проекция множества Ce на ось OY не есть аналитическое множество. Это показывает, что линейное множество e не измеримо B, так как в противном случае его дополнение Ce было бы также измеримым B и, следовательно, его проекция на ось OY была бы в этом случае аналитическим множеством.

Итак, линейное множество e есть линейное аналитическое множество, неизмеримое B, и, следовательно, плоское универсальное множество E само является аналитическим множеством, неизмеримым B.

Это рассуждение можно дополнить следующим простым замечанием: универсальное аналитическое множество E не может быть измеримым B, так как в противном случае E должно было бы принадлежать к определенному классу K_α классификации Валле-Пуссена. Отсюда следует, что никогда нельзя получить линейное множество, измеримое B, и класса выше α, если пересекать E прямыми $x=x_0$. Но так как E *универсально*, мы заведомо будем получать множества класса $>\alpha$, если только подходящим образом выберем точку x_0. Таким образом, мы приходим к противоречию.

Но это последнее рассуждение, каким бы оно ни казалось простым, вводит трансфинитные числа и пользуется существованием множеств всех классов. С этой точки зрения первое рассуждение предпочтительнее.

Таким образом, мы доказали, что понятие аналитического множества есть более общее, чем понятие множества измеримого B. Это заставляет нас изучить для этих множеств основные свойства точечных множеств, каковыми являются *мощность*, *мера* и *категория*.

Свойства аналитических множеств

Когда дано какое-либо точечное множество, тотчас же возникают три основных вопроса: если это множество несчетно — имеет ли оно мощность континуума? Измеримо ли это множество? Обладает ли оно свойством Бэра? Мы теперь исследуем свойства аналитических множеств по отношению к этим вопросам.

Мощность. Пусть E есть *несчетное* аналитическое множество, расположенное в m-мерной области. Пусть $\mathfrak{E}$ есть элементарное множество в $m+1$-мерном пространстве, причем его ортогональная проекция есть данное множество E.

Так как диаметр параллелепипеда Бэра порядка n стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает, то существует целое положительное число n, достаточно большое для того, чтобы среди параллелепипедов *ранга* n (стр. 141) нашлось два параллелепипеда π и π', обладающих следующими двумя свойствами: 1° проекции π и π' не имеют общих точек; 2° проекции частей $\mathfrak{E}$, содержащихся в π и в π', являются обе несчетными множествами.

Раз так, то мы находимся в тех же условиях, как и раньше, и мы можем определить в каждом из двух параллелепипедов π и π' два новых параллелепипеда ранга выше n, обладающих теми же свойствами; мы получаем, таким образом, *четыре* вполне определенных параллелепипеда. Мы продолжаем оперировать также над каждым из них и получаем *восемь* определенных параллелепипедов, обладающих теми же свойствами, и *так далее безгранично*.

Ясно, что множество точек, каждая из которых принадлежит бесконечному множеству параллелепипедов Бэра, так определенных, есть *совершенное* множество в классическом смысле, и притом содержащееся в данном элементарном множестве $\mathfrak{E}$. К тому же проекции двух различных точек этого совершенного множества всегда различны.

Отсюда следует, что проекция этого совершенного множества есть опять совершенное множество в классическом смысле. А так как это последнее, очевидно, содержится в данном аналитическом множестве E, то мы получаем теорему:

Всякое несчетное аналитическое множество необходимо содержит совершенное множество и, следовательно, имеет мощность континуума[1].

Мера. Пусть E — произвольное аналитическое множество, о котором известно только, что оно имеет внешнюю меру, *не равную нулю*, $m_e E > 0$.

---

[1] Теорема Суслина. См. Comptes Rendus, 8 января 1918 г.

Сделаем прежде всего одно весьма банальное замечание: чтобы доказать, что некоторое точечное множество E *с не равной нулю* внешней мерой измеримо, необходимо и достаточно установить, что оно содержит замкнутое множество F, мера которого превосходит $m_e E - \varepsilon$, где ε — как угодно малое положительное число.

В самом деле, с одной стороны, можно заключить точки E в ряд параллелепипедов (прямоугольников, интервалов), общая протяженность которых (объем, площадь, длина) меньше, чем $m_e E + \varepsilon$. С другой стороны, все точки, не принадлежащие к E, очевидно, заключаются в ряде параллелепипедов, внешних к замкнутому множеству F; их общая протяженность меньше, чем $1 - mF + \varepsilon$. Значит, общая протяженность этих двух рядов параллелепипедов меньше, чем

$$m_e E + \varepsilon + 1 - mF + \varepsilon < 1 + 3\varepsilon$$

и, следовательно, E измеримо. Несмотря на свою банальность, это замечание будет нам очень полезно.

Сделаем еще одно замечание: если мы имеем последовательность E_1, E_2, ... любых множеств, не подчиненных никакому закону, то внешняя мера множества-суммы n первых членов этой последовательности стремится к внешней мере суммы *всех* членов этой последовательности, когда n неограниченно возрастает.

Отсюда следует, что можно выбрать достаточно большое число n_1 параллелепипедов ранга 1, для того чтобы часть элементарного множества $\mathfrak{E}$, содержащаяся в этих n_1 параллелепипедах, имела проекцию, внешняя мера которой превосходит $m_e E - \varepsilon_1$.

Будем оперировать также над параллелепипедами *ранга* 2, содержащимися в выбранных параллелепипедах ранга 1: мы можем взять число n_2 настолько большим, чтобы часть $\mathfrak{E}$, содержащаяся в них, имела проекцию, мера которой превосходит $m_e E - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, и так далее.

Мы образуем таким образом суммы S'_1, S'_2, S'_3, ... параллелепипедов рангов 1, 2, 3... соответственно, каждая из S'_n состоит из *конечного* числа параллелепипедов множества S_n (стр. 141) и содержится внутри предыдущей S'_{n-1}, а проекция части элементарного множества $\mathfrak{E}$, содержащейся в параллелепипедах из S'_n, имеет внешнюю меру, превосходящую $m_eE - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \ldots \varepsilon_n$; здесь ряд с положительными членами $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$ сходится и имеет как угодно малую сумму ε.

Отсюда следует, что проекция S'_n имеет протяженность, превосходящую $m_eE - \varepsilon$. Но так как проекция множества S'_n, очевидно, состоит из конечного числа параллелепипедов Бэра и содержится в проекции множества S'_{n-1}, то общая часть проекций всех S'_n есть замкнутое множество F, мера которого превосходит $m_eE - \varepsilon$.

С другой стороны, общая часть сумм $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n, \ldots$ есть, очевидно, замкнутое множество, содержащееся в элементарном множестве $\mathfrak{E}$; это замкнутое множество мы обозначим через H.

Легко видеть, что множество H имеет своей проекцией множество F. Значит, F содержится в данном аналитическом множестве E.

В силу предыдущего замечания множество E есть измеримое, и, следовательно, мы получили теорему:

Всякое аналитическое множество измеримо [1]).

Категория. Мы теперь докажем, что всякое аналитическое множество обладает свойством Бэра, принадлежащим всем множествам, измеримым B [2]).

Обратимся к стр. 86: все сводится к тому; чтобы доказать, что если данное аналитическое множество E не есть множество 1-й категории *ни на какой* порции некоторого совершенного множества P, то его дополнение CE есть множество 1-й категории на P.

Начнем с того, что выбросим из $m+1$-мерной области, где помещается элементарное множество $\mathfrak{E}$, все параллелепипеды, каков бы ни был их порядок, такие, что содержащаяся в них часть $\mathfrak{E}$ имеет проекцию первой категории на P. Ясно, что сохранятся при этом параллелепипеды всех порядков.

Установив это, мы будем оперировать с каждым из сохраненных параллелепипедов, каков бы ни был его порядок,

[1]) См, теорему V моей заметки в Comptes Rendus Acad. Sc. 8 января 1917 г.

[2]) См. теорему VI моей заметки в Comptes Rendus Acad. Sc, 8 января 1917 г.

следующим образом: пусть π — рассматриваемый параллелепипед; мы возьмем часть $\mathcal{E}$, содержащуюся в π. Так как π сохранен, эта часть $\mathcal{E}$ имеет проекцию уже не первой категории на P. Следовательно, на P существует замкнутое множество F, обладающее следующими двумя свойствами:

1° если σ есть порция P, содержащаяся в F, то проекция части $\mathcal{E}$, содержащаяся в π, будет первой категории на σ;

2° если σ есть порция P, содержащая точку, которая не принадлежит к F, то указанная проекция не будет первой категории на σ.

Установив этот первый пункт, мы определяем для каждого сохраненного параллелепипеда π', содержащегося в π, и порядка, непосредственно следующего за порядком π, соответствующее замкнутое множество F'.

Ясно, что общая часть всех замкнутых множеств F' есть множество *нигде не плотное* на всякой порции P, не содержащей точек F. Это значит, что множество точек, принадлежащих всем F' и не принадлежащих F, есть множество не плотное на P; мы его обозначим через H_π.

Таким образом, всякому сохраненному параллелепипеду Бэра π, каков бы ни был его порядок, соответствует вполне определенное множество H_π, не плотное на P. Отсюда следует, что сумма всех множеств H_π, соответствующих различным π, есть множество первой категории на P. Обозначим его через H.

Мы сейчас докажем, что *каждая точка M множества P, не принадлежащая к H, есть точка данного аналитического множества E.*

В самом деле, так как M не принадлежит к H, то существует сохраненный параллелепипед Бэра π_0 порядка 0 такой, что M не входит в замкнутое множество F_0, соответствующее π_0; так как M не принадлежит к H_{π_0}, то существует в π_0 сохраненный параллелепипед Бэра π_1 порядка 1 такой, что M не входит в замкнутое множество F_1, соответствующее π_1; так как M не принадлежит к H_{π_1}, то в π_1 существует сохраненный параллелепипед Бэра π_2 порядка 2 такой, что M не входит в замкнутое множество F_2, соответствующее π_2 и так далее.

Таким образом, мы получим последовательность сохраненных параллелепипедов π_0, π_1, π_2, ... порядков, соответственно равных 0, 1, 2, 3 ..., каждый из которых содержится в предыдущем, причем точка M не принадлежит ни одному из замкнутых множеств F_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Следовательно, точка M непременно принадлежит к проекции каждого из параллелепипедов π_0, π_1, π_2, ...

Отсюда мы заключаем, что M есть проекция некоторой точки N, принадлежащей всем параллелепипедам π_0, π_1, π_2, ... и, следовательно, являющейся точкой элементарного множества $\mathfrak{E}$. Итак, M принадлежит к E.

Таким образом, каждая точка P, не принадлежащая к E, должна принадлежать к H. Но так как H первой категории на P, то и CE также. Ч. т. д.

Мы дополним этот результат следующими замечаниями:

Замечание I. Пусть E есть линейное аналитическое множество, неизмеримое B и пусть $f(x)$ есть характеристическая функция для E, т. е. $f(x)$ равна 1 на E и 0 на его дополнении. Так как E неизмеримо B, то $f(x)$ не входит в классы Бэра. Но, согласно доказанной теореме, множество E обладает свойством Бэра и, следовательно, *функция $f(x)$ точечно разрывна на всяком совершенном множестве, если пренебречь множеством первой категории на этом совершенном множестве.*

Мы видим, что свойство, открытое Бэром и принадлежащее всем функциям его классификации, не является достаточным.

Замечание II. Если некоторое множество точек измеримо, то и его дополнение тоже. Та же взаимность имеет место для свойства Бэра. Следовательно:

Дополнение к аналитическому множеству измеримо и обладает свойством Бэра.

В дальнейшем мы будем называть кратко те множества, которые являются дополнениями к аналитическим множествам, *аналитическими дополнениями.*

Первый принцип аналитических множеств. Отделимость B

Общие идеи. В данном нами определении аналитических множеств понятие трансфинитного явно не входит. Тем не менее, детальное изучение этих множеств показывает, что совокупность всех трансфинитных чисел второго класса по Кантору глубоко спрятана в аналитических множествах, неизмеримых B.

Полученные в теории аналитических множеств результаты наилучшим образом показывают, что необходимо рассматривать аналитические множества, неизмеримые B, как в некотором роде продолжение классификации Валле-Пуссена за классы K_α, перенумерованные при помощи всех трансфинитных чисел второго класса по Кантору. Точнее говоря, на эти аналитические множества надо смотреть, как на *элементы класса* Ω, где Ω — первое трансфинитное число «третьего класса» по Кантору. Среди многочисленных, бьющих в глаза аналогий, мы укажем ту, которая связана с отделимостью множеств.

В теории множеств, измеримых B, мы видели, что два элемента класса K_α без общих точек всегда отделимы при помощи множеств *или* класса $< \alpha$ *или* базы B_α.

Вполне аналогичное предложение имеет место и для аналитических множеств [1]). Чтобы убедиться в этом, введем новое понятие, а именно понятие об отделимости B.

Мы скажем, что два множества E и E' без общих точек *отделимы* B, если существуют два множества H и H', измеримые B, без общей точки и содержащие соответственно множества E и E'.

Множества H и H', обладающие этим свойством, мы назовем *отделяющими множествами*.

Установив это определение, мы формулируем основное предложение теории аналитических множеств, называемое *первым принципом этой теории* [2]).

Принцип I. *Два аналитических множества без общих точек всегда отделимы* B.

Мы дадим *два* различных доказательства принципа I. Для того чтобы лучше оценить существенную разницу между этими двумя доказательствами, напомним две классические

---

[1]) Читатели, желающие получить более детальные разъяснения по поводу этой аналогии, могут обратиться к моему мемуару: «Analogies entre les ensembles mesurables B et les ensembles analytiques» (Fund. Math., XVI, 1930).

[2]) Я высказал в явной форме и доказал этот принцип в своем мемуаре «Sur les ensembles analytiques», Fund. Math., т. X, стр. 52.

теоремы: *всякое замкнутое множество, не содержащее никакого совершенного множества, счетно* (Кантор — Бендиксон) и *теорему Бэра* о функциях класса 1.

Каждое из этих предложений имеет два доказательства. Одно из них дает не только доказательство теоремы, но и *регулярный процесс*, который, в первом случае, дает нам вполне определенное перенумерование точек рассматриваемого замкнутого множества при помощи целых чисел, а во втором случае эффективное построение ряда многочленов, сходящегося к рассматриваемой функции класса 1. Это доказательство можно рассматривать как положительное и известно, что оно дано для замкнутых множеств Бендиксоном и Серпинским, а для функций класса 1 самим Бэром.

Но есть другой вид доказательств для этих теорем. Доказательства этого рода не дают ни процесса перенумерования точек замкнутого множества, ни построения ряда полиномов, имеющего суммой функцию класса 1, но доказывают лишь *существование* такого перенумерования и такого ряда полиномов. Вот механизм доказательств: каждый раз вводят некоторое общее, но чисто отрицательное понятие: в случае замкнутых множеств это понятие *точки сгущения*, которым мы обязаны Линделефу, а в случае функций класса 1 это понятие *точки, где функция не есть класса* 1; этим понятием мы обязаны Лебегу. Эти доказательства можно рассматривать как отрицательные.

Аналогичным образом мы дадим два доказательства принципа 1: одно из них чисто отрицательное и очень короткое (как, впрочем, и доказательства Линделефа и Лебега), другое — положительное и достаточно трудное; его преимуществом является то, что оно дает эффективное построение множеств H и H', которые осуществляют отделение данных аналитических множеств E и E', тогда как в первом доказательстве дается лишь существование этих множеств.

Отделимость *B* для аналитических множеств. Перейдем теперь к доказательству принципа I.

Первое доказательство (отрицательное). Пусть $x=f(t)$ есть непрерывное параметрическое изображение аналитического множества E и $x=\varphi(t)$ такое же изображение для аналитического множества E'. Мы предполагаем, что E и E' не имеют общих точек.

Возьмем на порции (0,1) области $\mathcal{J}_t$ интервал Бэра δ порядка k и аналогично интервал Бэра δ' того же порядка k на (0,1) в области $\mathcal{J}_{t'}$. Обозначим через E_δ и E'_δ части E и E', которые мы получим, если заставим t и t' пробегать соответственно δ и δ'. Ясно, что E_δ и $E'_{\delta'}$ не имеют общей точки.

Установив это, назовем пару (δ, δ') интервалов Бэра δ и δ' *особой*, если соответствующие множества E_δ и $E'_{\delta'}$ *неотделимы* B.

Очевидно, что если пара (δ, δ') особая, то существует пара (δ_1, δ'_1), образованная из интервалов Бэра δ_1 и δ'_1 порядка $k+1$, содержащихся соответственно в δ и δ', причем эта пара будет опять особой. В самом деле, если множества E_{δ_1} и $E'_{\delta'_1}$ отделимы B, каковы бы ни были δ_1 и δ'_1, взятые соответственно в δ и δ', то множество E_δ отделимо B от $E'_{\delta'}$, так как достаточно взять общую часть множеств, отделяющих E_{δ_1} от множеств $E'_{\delta'_1}$, где δ'_1 пробегает все интервалы Бэра порядка $k+1$, содержащиеся в δ': эта общая часть, будучи измеримой B, очевидно, отделяет E_{δ_1} от $E'_{\delta'}$. Но лишь только $E'_{\delta'}$ отделимо B от E_{δ_1}, каково бы ни было δ_1 в δ, предыдущее рассуждение снова применимо, и отсюда мы заключаем, что $E'_{\delta'}$ отделимо B от E_δ, что невозможно, так как пара (δ, δ') особая.

Таким образом, каждая особая пара (δ, δ') необходимо содержит пару (δ_1, δ'_1) интервалов Бэра следующего порядка, являющуюся опять особой.

Установив это, допустим, что данные множества E и E' неотделимы B. В этих условиях существует бесконечная последовательность особых пар

$$(\delta_1, \delta'_1), (\delta_2, \delta'_2), \ldots, (\delta_n, \delta'_n), \ldots$$

порядков, соответственно равных $1, 2, \ldots, n, \ldots$ причем каждая из этих пар содержится в предыдущей. Отсюда следует, что интервалы Бэра δ_n стремятся к иррациональной точке t_0, а δ'_n к иррациональной точке t'_0.

Так как множества E и E' не имеют общей точки, то $f(t_0) \neq \varphi(t'_0)$. С другой стороны, функции $f(t)$ и $\varphi(t)$

непрерывны. Это значит, что значения функций f и φ в δ_n и δ_n' как угодно близки соответственно к двум *фиксированным* точкам $f(t_0)$ и $\varphi(t_0')$, когда n неограниченно возрастает. Отсюда следует, что множества E_{δ_n} и $E'_{\delta_n'}$ расположены в двух различных порциях σ и σ' области $\mathcal{J}_x$; эти порции при достаточно большом n не имеют общей точки. Следовательно, E_{δ_n} и $E'_{\delta_n'}$ отделены друг от друга при помощи порций, и мы пришли к противоречию. Ч. т. д.

Сделаем следующее замечание: для определенности мы ограничились *линейными* аналитическими множествами. Но, принимая за f и φ *комплексные* функции, мы, очевидно, получим доказательство принципа I для аналитических функций любого числа измерений.

Второе доказательство (положительное). Это доказательство основано на следующей геометрической лемме:

Если порция $(0 < t < 1,\ 0 < t' < 1)$ *двумерной области* $\mathcal{J}_{t,t'}$ *разделена на прямоугольники Бэра, то множество* R *тех прямоугольников Бэра, которые не содержатся в узком смысле ни в одном из прямоугольников этого разбиения, может быть эффективно представлено в виде вполне упорядоченной последовательности* $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\omega, \ldots \ldots, \rho_\alpha, \ldots, |\gamma$ *так, что из двух любых прямоугольников* ρ_α *и* ρ_β *этой последовательности или последующий содержит предыдущий, или они не имеют ни одной общей точки.*

Чтобы убедиться в этом, расположим прямоугольники из R в простую бесконечную последовательность

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \qquad (1)$$

Мы скажем, что вполне упорядоченная последовательность E прямоугольников из R образует *цепь*, если: 1° первый член ρ_0 из E есть первый из членов последовательности (1), который встречается в разбиении порции $(0 < t < 1, 0 < t' < 1)$ на частные интервалы Бэра; 2° каков бы ни был член ρ из E, он является первым прямоугольником последовательности (1), не совпадающим ни с одним из предшествующих членов ρ в E, и притом он либо является частичным прямоугольником рассматриваемого разбиения, либо все прямоугольники Бэра порядка, непосредственно следующего за порядком ρ, являются членами последовательности E, предшествующими ρ.

Ясно, что цепи существуют, так как первый из членов последовательности (1), входящих в рассматриваемое разбиение, является цепью; ясно, что если рассмотреть две какие-либо цепи E и E', то одна из них есть сегмент другой, так как каждый член одной цепи единственным образом определяется предшествующими членами и знанием последовательности (1). Отсюда следует, что каждой цепи E, не являющейся самой большой, т. е. служащей сегментом другой более длинной цепи, соответствует один и только один член простой бесконечной последовательности (1), и значит одно вполне определенное целое число n. Из этого мы заключаем, что множество всех возможных цепей счетно, так как оно уже перенумеровано при помощи целых чисел.

Установив это, обозначим через C соединение всех возможных цепей. Так как каждая цепь есть всегда сегмент другой цепи, то C есть опять цепь. Ясно, что это *самая большая цепь*, т. е. такая, что каждая другая цепь есть сегмент C.

Я теперь утверждаю, что цепь C состоит из всех прямоугольников R и что сама порция ($0 < t < 1$, $0 < t' < 1$) есть последний член C.

В самом деле, обозначим через R' множество прямоугольников из R, которые входят в C. Если в R есть члены, которые не входят в R', то каждый из них содержит прямоугольники Бэра непосредственно следующего порядка и также не содержащиеся в R', а следовательно, и в R. В самом деле, в противном случае среди прямоугольников разности $R - R'$ в последовательности (1) найдется первый, пусть r_m, в котором все прямоугольники непосредственно следующего порядка принадлежат к C. Тогда, прибавляя r_m к цепи C, мы получим новую цепь (C, r_m), более длинную, чем C, что невозможно.

Итак, каков бы ни был прямоугольник разности $R - R'$ (если эта разность существует), он содержит прямоугольники непосредственно следующего порядка, также принадлежащие к $R - R'$. Следовательно, мы имеем бесконечную последовательность прямоугольников Бэра

$$r_{n_0},\ r_{n_1},\ r_{n_2},\ \ldots,\ r_{n_k},\ \ldots$$

порядков, соответственно равных 0, 1, 2, ..., k, ..., каждый из которых лежит внутри предыдущего, причем все они принадлежат к $R-R'$ и, разумеется, стремятся к некоторой точке $M(t_0, t_0')$ области $\mathcal{J}_{tt'}$, расположенной внутри них.

С другой стороны, порция $(0<t<1,\ 0<t'<1)$ полностью была разделена на частичные прямоугольники Бэра; следовательно, точка M принадлежит к некоторому вполне определенному прямоугольнику этого разбиения; пусть это прямоугольник r_ν в последовательности (1). Так как последовательность (2) содержит *все* прямоугольники Бэра, содержащие точку M, то r_ν должен фигурировать в последовательности (2), а это невозможно, так как r_ν заведомо принадлежит к C, а значит, и к R'.

Итак, R' совпадает с R.

Отсюда следует, что наибольшая цепь C состоит из всех прямоугольников R. Но среди этих прямоугольников имеется и сама порция $(0<t<1,\ 0<t'<1)$. Так как она содержит все остальные члены из R, то из самого определения цепи вытекает, что эта порция есть последний член цепи C. Ч. т. д.

Установив эту важную лемму, возвратимся теперь к доказательству принципа I.

Пусть

$$x_1=f_1(t), \quad x_2=f_2(t), \ \ldots, \quad x_m=f_m(t)$$

и

$$x_1=\varphi_1(t'), \quad x_2=\varphi_2(t'), \ \ldots, \quad x_m=\varphi_m(t')$$

непрерывные параметрические изображения аналитических множеств E и E', не имеющих общих точек.

Рассмотрим порцию $(0<t<1,\ 0<t'<1)$ области $\mathcal{J}_{tt'}$. Каждой точке $P_0(t_0, t_0')$ этой порции соответствуют две точки M_0 и M_0', принадлежащие соответственно E и E' и расположенные в m-мерной области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$.

Так как множества E и E' без общих точек, то точки M_0 и M_0' всегда *различны*. Отсюда следует в силу непрерывности f_i и φ_i, что на $(0<t<1,\ 0<t'<1)$ существует прямоугольник Бэра r, содержащий точку P_0 и такой, что если точка $P(t, t')$ движется в r, соответствующие точки M и M' описывают две соответственные части множеств E и E', расположенные в двух порциях области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$, не имеющих общих точек. Среди таких прямоугольников Бэра r мы выберем тот, порядок которого наименьший, т. е. самый большой.

Таким образом, каждой точке $P(t, t')$ мы приводим в соответствие содержащий ее прямоугольник Бэра. Отсюда следует, что порция $(0 < t < 1,\ 0 < t' < 1)$ полностью разделена на прямоугольники Бэра попарно без общих точек и, вообще говоря, различных порядков. В самом деле, если бы два таких прямоугольника имели общую точку, один из них должен был бы содержать другой, что невозможно, так как среди прямоугольников Бэра, содержащих некоторую точку P, мы каждый раз берем наибольший, соответствующий частям E и E', отделимым друг от друга при помощи порций. Обозначим через $\mathfrak{R}$ множество прямоугольников этого разбиения.

Установив это, применим предыдущую лемму и рассмотрим цепь C

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\omega, \ldots, \rho_\alpha, \ldots |\rho_\nu, \qquad (C)$$

образованную из всех прямоугольников Бэра, не содержащихся в узком смысле ни в одном из частичных прямоугольников ранее определенного разбиения.

Из определения цепи C следует, что каков бы ни был член ρ_α цепи C_α, он или является прямоугольником из $\mathfrak{R}$, или все прямоугольники непосредственно следующего порядка, содержащиеся в ρ_α, принадлежат к сегменту цепи C, определяемому членом ρ_α. Наконец, известно, что последний член ρ_ν цепи C есть порция $(0 < t < 1,\ 0 < t' < 1)$ области $\mathcal{J}_{tt'}$.

Каждому члену ρ_α цепи C соответствуют две части множеств E и E', которые получаются, когда точка $P(t, t')$ пробегает прямоугольник ρ_α. Эти части мы обозначим через E_{ρ_α} и E'_{ρ_α}.

Так как ρ_0 есть прямоугольник из $\mathfrak{R}$, то отделимость B множеств E_{ρ_0} и E'_{ρ_0} осуществлена при помощи двух вполне определенных порций области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, не имеющих общей точки. Допустим теперь, что мы имеем вполне определенную отделимость B для двух множеств $E_{\rho_{\alpha'}}$ и $E'_{\rho_{\alpha'}}$, соответствующих члену $\rho_{\alpha'}$ цепи C, предшествующему данному члену ρ_α, $\alpha' < \alpha$, каково бы ни было α', меньшее, чем α. Из этого мы выведем вполне определенную отделимость B для множеств E_{ρ_α} и E'_{ρ_α}. Мы естественно предполагаем, что ρ_α не есть прямоугольник из $\mathfrak{R}$, так как в этом случае отделимость B множеств E_{ρ_α} и E'_{ρ_α} была бы уже осуществлена при помощи порций области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$.

Пусть δ и δ' — проекции ρ_α на оси OT и OT'. Ясно, что δ и δ' суть интервалы Бэра того же порядка, как и ρ_α; пусть k — этот порядок. Пусть δ_1 и δ_1' — интервалы Бэра порядка $k+1$, содержащиеся соответственно в δ и δ'. Прямоугольник ρ, проекциями которого на оси OT и OT' служат δ_1 и δ_1', есть, очевидно, прямоугольник Бэра порядка $k+1$, содержащийся в ρ_α; по определению цепи C, прямоугольник ρ заведомо входит в цепь C и предшествует ρ_α. Следовательно, на основании сделанной гипотезы, множества $E_\rho (=E_{\delta_1})$ и $E'_\rho (=E_{\delta_1'})$ отделены, и мы умеем получить отделяющие множества H_{δ_1} и $H_{\delta_1'}$, измеримые B.

Установив это, рассмотрим два новых множества H_δ и $H'_{\delta'}$, определенные формулами

$$H_\delta = \sum_{\delta_1} \prod_{\delta_1'} H_{\delta_1}$$

и

$$H'_{\delta'} = \sum_{\delta_1'} \prod_{\delta_1} H'_{\delta_1'},$$

где для получения H_δ берется сначала общая часть всех H_{δ_1}, когда δ_1' пробегает все интервалы Бэра порядка $k+1$, содержащиеся в δ', а затем берется сумма так полученных общих частей, когда δ_1 пробегает все интервалы Бэра порядка $k+1$, содержащиеся в δ; аналогичным образом получается $H'_{\delta'}$.

Вполне очевидно, что так определенные множества H_δ и $H'_{\delta'}$ не имеют общих точек и что они соответственно содержат $E_{\rho_\alpha} (=E_\delta)$ и $E'_{\rho_\alpha} (=E'_{\delta'})$. А так как H_δ и $H'_{\delta'}$, очевидно, измеримы B, то отсюда следует, что множества E_{ρ_α} и E'_{ρ_α} отделимы B, причем это отделение осуществлено единственным образом.

Установив это, вернемся к доказательству принципа I. Так как ρ_α есть произвольный член цепи C, мы можем принять за ρ_α последний член из C. Отделяющие множества H и H' построенные для этого члена, дают нам искомое отделение данных аналитических множеств E и E'. Ч. т. д.

Изучение регулярных и полурегулярных изображений аналитических множеств

Регулярное изображение

Измеримость B аналитических множеств, допускающих регулярное параметрическое изображение. Мы видели (стр. 114), что всякое несчетное множество, измеримое B, допускает непрерывное (и даже *нормальное*) параметрическое изображение, если пренебречь счетным множеством его точек.

Обратное предложение также имеет место:

Всякое аналитическое множество E, допускающее непрерывное регулярное изображение, обязательно измеримо B, и из его изображения можно вывести эффективное построение E, отправляясь от порций основной области, при помощи двух операций: сложения и взятия общей части, неограниченно повторяемых [1]).

Пусть E есть аналитическое множество и

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \; \ldots, \; x_m = f_m(t)$$

— его непрерывное регулярное параметрическое изображение.

Пусть k — любое целое положительное число, $k \geqslant 1$. Разделим порцию $(0,1)$ области $\mathcal{J}_t$ на интервалы Бэра порядка k;

---

[1]) Это теорема IV моей заметки в Comptes Rendus Acad. Sc. 8 января 1917 г. Если какое-либо множество E допускает регулярное параметрическое непрерывное изображение, то оно непременно измеримо B и мы видим, что *каждая* точка *E есть точка сгущения в смысле Линделефа.*

В. Серпинский доказал, что всякое множество, измеримое B, каждая точка которого есть точка сгущения в смысле Линделефа, допускает непрерывное регулярное параметрическое изображение без того, чтобы было необходимо пренебрегать хоть одной точкой этого множества. См. его работу «Sur les images continues et biunivoques de l'ensemble de tous les nombres irrationales», Mathematica, т. 2, 1928, Cluj, стр. 18.

пусть $\delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)}, \ldots, \delta_n^{(k)}, \ldots$ эти интервалы. Заставляя t пробегать $\delta_n^{(k)}$, мы получаем часть E, которую обозначим через $E_n^{(k)}$. Ясно, что при *фиксированном* k, множества $E_n^{(k)}$ суть аналитические множества попарно без общих точек. Обозначим через $\Delta_n^{(k)}$ параллелепипед Бэра области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ наивысшего порядка содержащий $E_n^{(k)}$; такой параллелепипед заведомо существует, так как множество $E_n^{(k)}$ не может свестись к одной единственной точке.

Установив это, вернемся к множествам $E_n^{(k)}$, где число k все еще фиксировано. Так как аналитическое множество $E_n^{(k)}$ не имеет ни одной общей точки с суммой остальных аналитических множеств $E_{n'}^{(k)}$ при n', отличном от n, и так как эта сумма есть аналитическое множество, непрерывное параметрическое изображение которого известно, то мы можем найти множество $H_n^{(k)}$, измеримое B и покрывающее $E_n^{(k)}$, которое с этой суммой не имеет ни одной общей точки. Если мы построим $H_n^{(k)}$ для всякого $E_n^{(k)}$, мы получим бесконечную последовательность множеств, измеримых B

$$H_1^{(k)}, H_2^{(k)}, \ldots, H_n^{(k)}, \ldots,$$

каждое из которых содержит один и только один член последовательности $E_1^{(k)}, E_2^{(k)}, \ldots, E_n^{(k)}, \ldots$ и не имеет ни одной общей точки с другими членами этой последовательности. В этих условиях общая часть

$$\Delta_n^{(k)} \cdot H_n^{(k)} \prod_{n' \neq n} CH_{n'}^{(k)}$$

параллелепипеда Бэра $\Delta_n^{(k)}$, множества $H_n^{(k)}$ и дополнений к множествам $H_{n'}^{(k)}$ для всякого n', неравного n, есть множество, измеримое B, содержащееся в $\Delta_n^{(k)}$ и содержащее $E_n^{(k)}$; мы обозначим эту общую часть через $\theta_n^{(k)}$. Важно заметить, что когда число k фиксировано, то множества $\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \ldots, \theta_n^{(k)}, \ldots$ не имеют попарно общих точек и, следовательно, осуществляют *одновременную* отделимость множеств

$$E_1^{(k)}, E_2^{(k)}, \ldots, E_n^{(k)}, \ldots$$

Установив это, обозначим через S_k сумму отделяющих множеств $\theta_n^{(k)}$, $n=1, 2, 3, \ldots$ и через $\mathfrak{E}$ общую часть сумм S_k, $\mathfrak{E}=S_1 \cdot S_2 \ldots S_k \ldots$. Так как каждое $\theta_n^{(k)}$ измеримо B, то и множество $\mathfrak{E}$ также измеримо B.

Рассматриваемое аналитическое множество E есть, очевидно, сумма множеств $E_n^{(k)}$ при k фиксированном и $n=1, 2, 3, \ldots$ Отсюда следует, что E содержится в каждой сумме S_k, а следовательно, и во множестве $\mathfrak{E}$.

Мы докажем, что каждая точка M из $\mathfrak{E}$ принадлежит к E.

В самом деле, если точка M_0 области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ содержится в $\mathfrak{E}$, то в каждой сумме S_k имеется один и только один член $\theta_n^{(k)}$, содержащий M_0; пусть $\theta_{n_k}^{(k)}$ этот член. Обозначим через $\delta_{n_k}^{(k)}$ интервал Бэра, соответствующий множеству $E_{n_k}^{(k)}$.

Ясно, что интервалы Бэра последовательности $\delta_{n_1}^{(1)}, \delta_{n_2}^{(2)}, \ldots$ $\ldots, \delta_{n_k}^{(k)}, \ldots$ имеют соответственно порядок, равный $1, 2, \ldots$ $\ldots, k, \ldots$ и заключены друг в друге. Следовательно, существует одна и только одна иррациональная точка t_0, которая принадлежит всем этим интервалам.

Установив это, рассмотрим точку $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, определенную уравнениями:

$$x_1^0=f_1(t_0), \quad x_2^0=f_2(t_0), \ \ldots, \ x_m^0=f_m(t_0).$$

Легко видеть, что P_0 есть точка E. Докажем, что она совпадает с M_0.

В самом деле, так как t_0 принадлежит к $\delta_{n_k}^{(k)}$, каково бы ни было число k, то точка P_0 принадлежит к $\theta_{n_k}^{(k)}$. С другой стороны, точка M_0 принадлежит тому же множеству $\theta_{n_k}^{(k)}$. Следовательно, две *постоянные* точки M_0 и P_0 принадлежат одному и тому же параллелепипеду Бэра $\Delta_{n_k}^{(k)}$, содержащему множество $\theta_{n_k}^{(k)}$. Но когда k стремится к бесконечности, диаметр $\Delta_{n_k}^{(k)}$ необходимо стремится к нулю в силу непрерывности функций $f_i(t)$. Отсюда следует, что P_0 совпадает с M_0.

Таким образом, мы доказали, что данное аналитическое множество E совпадает с множеством $\mathcal{E}$, измеримым B. Ч. т. д.

Приложение к проекциям множеств, измеримых B. Мы видели (стр. 143), что ортогональная проекция аналитического множества есть опять аналитическое множество. В частности, ортогональная проекция всякого множества, *измеримого B*, есть *аналитическое* множество. С другой стороны, мы видели, что всякое аналитическое множество есть ортогональная проекция множества, измеримого B, некоторого частного вида; такое множество мы назвали *элементарным множеством*; оно является элементом класса 2.

Отсюда следует, что в общем случае ортогональная проекция множества, измеримого B, неизмерима B.

Но есть один случай, когда можно утверждать измеримость проекции множества измеримого B.

Теорема. *Ортогональная проекция множества E, измеримого B и расположенного в m-мерной области на m'-мерную область, $m' < m$, непременно измерима B, если проекции двух различных точек множества E различны.*

Чтобы доказать это, возьмем множество E, измеримое B; пусть

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \ \ldots, \ x_m = f_m(t)$$

есть его непрерывное регулярное изображение.

Ясно, что проекция E на m'-мерную область $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_{m'}}$ дается непрерывным регулярным изображением

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \ \ldots, \ x_{m'} = f_{m'}(t),$$

где $m' < m$.

Но, согласно сделанной гипотезе, проекции на $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_{m'}}$ двух различных точек E также различны. Так как рассматриваемое непрерывное изображение E регулярно, то двум различным значениям t отвечают две различные точки из E, а стало быть, и две различные точки его проекции.

Отсюда мы заключаем, что непрерывное параметрическое изображение этой проекции регулярно, а следовательно, сама эта проекция измерима B. Ч. т. д.

Регулярное параметрическое изображение с помощью произвольных функций классификации Бэра. Мы видели, что нельзя расширить определения аналитического множества, взяв параметрическое изображение

$$x_1=f_1(t), \quad x_2=f_2(t), \ \ldots, \ x_m=f_m(t),$$

осуществленное при помощи произвольных функций классификации Бэра.

Важное аналогичное предложение существует также для случая *регулярного* параметрического изображения. Действительно, мы имеем следующую важную теорему:

Теорема. *Всякое аналитическое множество, обладающее регулярным параметрическим изображением с помощью произвольных функций из классификации Бэра, измеримо B.*

В самом деле, пусть $x_1=f_1(t)$, $x_2=f_2(t)$, $\ldots$, $x_m=f_m(t)$ — такое регулярное изображение множества E. Рассмотрим функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$, определенную следующим равенством:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m, t) =$$
$$= [x_1-f_1(t)]^2+[x_2-f_m(t)]^2+\ldots+[x_m-f_m(t)]^2.$$

Легко видеть, что эта функция, определенная на области $m+1$ измерений $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_mt}$, входит в классификацию Бэра. Тогда в силу теоремы Лебега (стр. 144) множество $\mathcal{E}$ точек области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_mt}$, для которых эта функция обращается в нуль, измеримо B. Очевидно, что координаты точек $N(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ множества $\mathcal{E}$ удовлетворяют совместным равенствам

$$x_1=f_1(t), \quad x_2=f_2(t), \ \ldots, \ x_m=f_m(t).$$

Следовательно, ортогональная проекция $\mathcal{E}$ на область $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ совпадает с множеством E.

Но из регулярности системы функций f_i следует, что проекции на область $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ двух различных точек $\mathcal{E}$ различны. Следовательно, в силу предшествующей теоремы множество E измеримо B. Ч. т. д.

Обобщение предыдущего результата. Очень легко значительно обобщить предыдущие теоремы, распространив их на тот случай, когда за область определения функции f_i принимают или аналитическое множество, или произвольное множество, измеримое B, В самом деле, мы имеем следующее предложение:

Теорема. *Если $x_1=f_1(t)$, $x_2=f_2(t)$, ..., $x_m=f_m(t)$ есть система каких-либо функций классификации Бэра, то множество E, которое пробегает точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$, когда t пробегает аналитическое множество e, есть также аналитическое множество. Кроме того, если e измеримо B и если параметрическое изображение, осуществленное при помощи функций f_i, регулярно на e, то множество E измеримо B.*

В самом деле, так как e есть аналитическое множество, то мы имеем непрерывное параметрическое изображение

$$t=\varphi(\tau)$$

этого множества на порции (0,1) области $\mathcal{J}_\tau$, причем φ непрерывна на этой порции.

В этих условиях сложные функции

$$x_1=f_1[\varphi(\tau)],\ x_2=f_2[\varphi(\tau)],\ \ldots,\ x_m=f_m[\varphi(\tau)]$$

осуществляют параметрическое изображение E на порции (0,1) области $\mathcal{J}_\tau$. Легко видеть, что эти функции входят в классификацию Бэра. Следовательно, множество E *аналитическое*. Если e несчетно и измеримо B, то, пренебрегая счетным множеством точек e, функцию φ можно предположить регулярной. Отсюда следует, что если предложенная система функций f_i регулярна на e, то такой же будет и система функций $f_i[\varphi(\tau)]$. Значит, множество E измеримо B. Ч. т. д.

Полурегулярное изображение

Мы скажем, что параметрическое изображение некоторого множества точек E, расположенного в области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$

$$x_1=f_1(t),\ x_2=f_2(t),\ \ldots,\ x_m=f_m(t),$$

полурегулярно, если каждой точке M множества E соответствует самое большее счетное множество значений t[1]).

В частности, функция $f(t)$, определенная на (0,1), называется *полурегулярной*, если уравнение $x^0=f(t)$ имеет не

[1]) См. мою заметку в Camptes Rendus Acad. Sc. 29 июля 1929 г.: «Sur la représentation paramétrique semi-régulière des ensembles»,

более, чем счетное число корней для всякого действительного x^0.

Мы будем изучать природу аналитических множеств, допускающих полурегулярное изображение, осуществляемое при помощи непрерывных функций или функций классификации Бэра.

Для изучения этих вопросов нам понадобится следующая теорема из геометрии:

Если $\mathscr{E}$ — аналитическое множество, расположенное в $m+1$-мерной области $\mathscr{J}_{x_1x_2\ldots x_my}$, то множество E тех точек M m-мерной области $\mathscr{J}_{x_1\ldots x_m}$, в которых проведенная через M параллель к оси OY пересекает $\mathscr{E}$ по крайней мере в двух точках, есть аналитическое множество.

Чтобы доказать это, расположим все *рациональные* точки оси OY *в бесконечную последовательность* $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ и возьмем точку r_n. Пусть $\mathscr{E}_n'$ и $\mathscr{E}_n''$ — части $\mathscr{E}$, для точек которых мы имеем соответственно $y < r_n$ и $y > r_n$. Обозначим через E_n' и E_n'' проекции множеств $\mathscr{E}_n'$ и $\mathscr{E}_n''$ на область $\mathscr{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ и через E_n — общую часть $E_n' \cdot E_n''$.

Легко видеть, что E есть множество тех точек M из E, в которых параллель к оси OY, проведенная через M, пересекает E по крайней мере в двух точках, для которых $y < r_n$ и $y > r_n$. Следовательно, сумма $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ совпадает с множеством E.

Но так как $\mathscr{E}_n'$ и $\mathscr{E}_n''$ — аналитические множества, то такими же будут E_n' и E_n''. Следовательно, E_n аналитическое, а потому и E аналитическое.

Преобразование многомерной области в линейную область. Начнем с доказательства того, что изучение множеств точек в многомерной области можно свести к изучению *линейных* множеств. С этой целью мы преобразуем m-мерную область $\mathscr{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ в линейную область $\mathscr{J}_x$ при помощи взаимно однозначного и взаимно непрерывного преобразования.

Рассмотрим в области $\mathscr{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ все параллелепипеды Бэра порядка 1 и осуществим взаимно однозначное соответствие между этими параллелепипедами π' и интервалами Бэра 1-го порядка δ' на порции (0,1) области $\mathscr{J}_x$. Установив соответствие между π' и δ', приведем во взаимно однозначное соответствие все параллелепипеды Бэра π'' порядка 2, лежащие в π', и все интервалы Бэра δ'' порядка 2, лежащие в δ'. Вообще, установив соответствие между некоторым параллелепипедом Бэра $\pi^{(k-1)}$ порядка $k-1$ области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ и интервалом Бэра $\delta^{(k-1)}$ на порции $(0,1)$ области $\mathcal{J}_x$, приведем во взаимно однозначное соответствие все параллелепипеды Бэра $\pi^{(k)}$ порядка k, лежащие в $\pi^{(k-1)}$, и все интервалы Бэра $\delta^{(k)}$ порядка k, лежащие в $\delta^{(k-1)}$.

Ясно, что мы получаем таким образом *взаимно однозначное соответствие* между точками всей области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ и точками порции $(0,1)$ линейной области $\mathcal{J}_x$. Легко видеть, что это соответствие *взаимно непрерывно* и что *если точка x пробегает интервал Бэра порядка k на* $(0,1)$ *в* $\mathcal{J}_x$, *то соответствующая точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ пробегает параллелепипед Бэра порядка k в* $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$.

Следовательно, это соответствие между $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ и порцией $(0,1)$ области $\mathcal{J}_x$ можно написать в двух формах

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = g_1(x),\ x_2 = g_2(x),\ \ldots,\ x_m = g_m(x) \\ \text{и}\qquad &x = G(x_1, x_2, \ldots, x_m), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где функции $g_i(x)$ *непрерывны* на $(0,1)$ в $\mathcal{J}_x$ и функция $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *непрерывна* на $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$.

Установленное соответствие, очевидно, ставит в соответствие каждому множеству e класса 0 на $\mathcal{J}_x$ некоторое множество E класса 0 на $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ *и обратно*. С другой стороны, каждая последовательность множеств $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$, расположенных в $\mathcal{J}_x$ и стремящихся к некоторому пределу e, преобразуется в некоторую последовательность множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, расположенных в $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ и стремящихся к пределу E, являющемуся образом e. Отсюда следует, что всякое множество e, измеримое B, в линейной области $\mathcal{J}_x$ преобразуется в некоторое множество E m-мерной области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$, также *измеримое B* и *того же класса и подкласса*, и обратно.

Установив это, рассмотрим аналитическое множество E, расположенное в $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ и допускающее *полурегулярное* параметрическое изображение

$$x_1 = f_1(t),\ x_2 = f_2(t),\ \ldots,\ x_m = f_m(t).$$

Если мы подставим эти функции f_i в функцию $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, ранее определенную, то мы получим непрерывную функцию $f(t)$, определенную равенством

$$x = f(t) = G[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)].$$

Если мы заставим t пробегать порцию $(0,1)$ области $\mathcal{J}_t$, то точка x, очевидно, будет пробегать некоторое линейное множество e на $\mathcal{J}_x$, и легко видеть, что *e есть образ E, получающийся при преобразовании* (1) *области* $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ в $\mathcal{J}_x$.

Если система функций $x_i = f_i(t)$ полурегулярна, то такой же будет и функция $f(t)$. Следовательно, и учение множества E из $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, допускающего полурегулярное изображение, сводится к изучению *линейного* множества e, допускающего полурегулярное изображение. Таким образом, если нам удастся доказать, что e измеримо B, то это же будет иметь место и для E.

Изучение непрерывных полурегулярных изображений. Мы сейчас докажем теорему, относящуюся к полурегулярным изображениям и во всех отношениях аналогичную предыдущей теореме, касающейся регулярных изображений (стр. 163).

Теорема. *Всякое аналитическое множество E, допускающее полурегулярное параметрическое изображение, обязательно измеримо B.*

Так как общий случай аналитического множества нескольких измерений сводится к случаю линейного аналитического множества, то мы ограничимся этим последним.

Возьмем непрерывную полурегулярную функцию

$$x = f(t),$$

определенную на $(0,1)$ в области $\mathcal{J}_t$, и обозначим через E множество значений $f(t)$ на $(0,1)$. Так как $f(t)$ полурегулярна, то каждой точке x из E соответствует не более, чем счетное множество значений t.

Все сводится к тому, чтобы доказать, что E измеримо B. Допустим обратное, т. е. что E неизмеримо B, Я утверждаю, что в этих условиях существует два *различных* интервала Бэра δ_1 и δ_2, расположенные в $\mathcal{J}_t$ и такие, что если e_1 и e_2 множества значений $f(t)$ соответственно на δ_1 и δ_2, то *общая часть* $e_1 \cdot e_2$ *неотделима В от дополнения СЕ к данному множеству Е.*

В самом деле, если бы это было не так, то каждая общая часть $e_1 \cdot e_2$ была бы отделима B от CE. Пусть h — множество измеримое B, содержащее CE и не содержащее ни одной точки $e_1 \cdot e_2$. Так как этих общих частей $e_1 \cdot e_2$ лишь счетное множество, то столько же будет и соответствующих множеств h. Обозначим через H общую часть всех множеств h; ясно, что H измеримо B и содержит CE. Кроме того, H не содержит ни одной точки общих частей $e_1 \cdot e_2$. Следовательно, каково бы ни было x из H, существует самое большее одно значение t, удовлетворяющее уравнению $x = f(t)$. Обозначим через θ множество точек t, для которых соответствующие точки x принадлежат к H. В силу обобщения теоремы Лебега[1]) множество θ измеримо B. А так как функция $f(t)$ регулярна на θ (т. е. имеет в разных точках θ различные значения), то отсюда следует, что множество значений $f(\theta)$ на θ измеримо B (стр. 168). Обозначим это множество через H_1; множество H_1 расположено в $\mathcal{J}_x$. Так как множество CE есть, очевидно, разность между H и H_1, то мы видим, что CE измеримо B, что невозможно, так как мы предположили, что E не измеримо B.

Установив это, допустим, что существует k *различных* интервалов Бэра $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$, расположенных в $\mathcal{J}_t$ и таких, что если мы обозначим через e_i множество значений $f(t)$ на δ_i, то общая часть $e_1 \cdot e_2 \ldots e_k$ неотделима B от множества CE. Я утверждаю, что в этих условиях мы можем выбрать в каждом δ_i два новых интервала Бэра δ_i' и δ_i'' *без общих точек* и таких, что если e_i' и e_i'' — множества значений $f(t)$ соответственно на δ_i' и δ_i'', *то общая часть*

---

[1]) Речь идет о следующем предложении: *какова бы ни была функция f классификации Бэра и каково бы ни было множество $\mathfrak{E}$, измеримое B, множество E тех точек, для которых значение f принадлежит к $\mathfrak{E}$, измеримо B.* Это предложение доказывается трансфинитной индукцией, отправляясь от ранее цитированной теоремы Лебега (стр. 144 этой книги) [15].

$(e'_1 \cdot e''_1) \times (e'_2 \cdot e''_2) \ldots (e'_k \cdot e''_k)$ *также неотделима* B *от* CE.

В самом деле, допустим противное. Это значит, что каков бы ни был выбор интервалов Бэра δ'_i и δ''_i в δ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, соответствующая общая часть $(e'_1 \cdot e''_1) \cdot (e'_1 \cdot e''_2) \ldots (e'_k \cdot e''_k)$ отделима B от CE. Пусть h — множество, измеримое B, содержащее CE и не содержащее никакой точки этой общей части. Так как этих общих частей лишь счетное множество, то столько же будет и множеств h. Следовательно, общая часть H этих множеств h есть множество, измеримое B, и легко видеть, что H содержит CE, но не содержит точек общей части $(e'_1 \cdot e''_1) \cdot (e'_2 \cdot e''_2) \ldots (e'_k \cdot e''_k)$. Отсюда следует, что если точка x принадлежит к H, то уравнение $x = f(t)$ имеет хотя бы в одном из интервалов δ_i самое большее один корень.

Установив это, обозначим через η_i множество точек x, для которых уравнение $x = f(t)$ имеет по крайней мере два корня в δ_i. Ясно, что η_i содержится в e_i. Легко видеть, что η_i — *аналитическое* множество. Чтобы убедиться в этом, обратимся к ранее доказанной (стр. 169) теореме из геометрии и рассмотрим в плоскости TOX часть кривой $x = f(t)$, которая получается, когда t пробегает интервал Бэра δ_i. Так как функция f непрерывна на $\mathcal{J}_t$, то кривая $x = f(t)$ есть плоское множество, измеримое B. Такою же будет и часть этой кривой, соответствующая интервалу δ_i. В силу указанной теоремы из геометрии множество η_i точек x_0, для которых прямая $x = x_0$ пересекает эту часть кривой $x = f(t)$ по крайней мере в двух точках, есть аналитическое множество.

Установив это, докажем, что множество η_i обладает следующим замечательным свойством: каждое множество Q, измеримое B, лежащее на $\mathcal{J}_x$ и не содержащее ни одной точки η_i, таково, что общая часть $Q \cdot e_i$ непременно измерима B.

Чтобы убедиться в этом, обозначим через T множество тех точек t из δ_i, для которых точки $x = f(t)$ принадлежат к Q. В силу теоремы Лебега [см. примечание 1) на стр. 144 (см. также [15] — *Ред.*)], T измеримо B. Легко видеть, что f регулярна на T (имеет различные значения). Следовательно, множество значений $f(t)$ на T измеримо B (стр. 168). Но это множество и есть как раз общая часть $Q \cdot e_i$.

Установив это, вернемся к множеству H, измеримому B. Мы видели, что если x принадлежит к H, то уравнение $x = f(t)$ имеет хоть в одном из интервалов δ_i не более одного корня. Отсюда следует, что общая часть $\eta_1 \cdot \eta_2 \ldots \eta_k$ не имеет общих точек с H. Значит, всякая точка H может принадлежать не более чем к $k-1$ множествам η_i одновременно.

Обозначим через θ_1 какую-либо из общих частей $k-1$ множеств η_i; существует k множеств θ_1. Общая часть H и θ_1 есть аналитическое множество, не имеющее общей точки с некоторым аналитическим множеством $H \cdot \eta_i$. Следовательно, $\theta_1 \cdot H$ можно заключить во множество $\overline{\theta}_1$, измеримое B и не содержащее ни одной точки множества η_i. Значит, общая часть $\overline{\theta}_1$ и соответствующего множества e_i измерима B. Отсюда следует, что точки общей части $e = e_1 \cdot e_2 \ldots e_k$, лежащие в $\overline{\theta}_1$, образуют множество, отделимое B от CE.

Установив это, удалим из H точки, принадлежащие соединению множеств $\overline{\theta}_1$ и обозначим через H_1 множество остающихся точек. Легко видеть, что H_1 измеримо B и что каждая точка x из H_1 принадлежит самое большее $k-2$ множествам η_i одновременно. Кроме того, часть e, содержащаяся в $H - H_1$, отделима B от CE.

Обозначим через θ_2 какую-либо из общих частей для группы из $k-2$ множеств η_i. Существует самое большее $\frac{k(k-1)}{2}$ множеств θ_2. Общая часть H_1 и θ_2 есть аналитическое множество, не имеющее ни одной общей точки с каким-либо из аналитических множеств $H \cdot \eta_i$. Следовательно, каждое множество $H \cdot \theta_2$ можно заключить во множество $\overline{\theta}_2$, измеримое B и не содержащее ни одной точки множества η_i. Следовательно, общая часть $\overline{\theta}_2$ и соответствующего множества e_i измерима B. Отсюда следует, что точки общей части $e = e_1 \cdot e_2 \ldots e_k$, находящиеся в $\overline{\theta}_2$, образуют множество, отделимое B от CE.

Установив это, удалим из H_1 точки, принадлежащие соединению множеств $\overline{\theta}_2$, и обозначим через H_2 множество остающихся точек. Легко видеть, что H_2 измеримо B и что каждая точка x из H_2 принадлежит самое большее $k-3$ множествам η_i одновременно. Кроме того, часть e, принадлежащая $H_1 - H_2$, отделима B от CE.

Продолжая таким же образом, мы получим конечную последовательность множеств H, H_1, H_2, ..., H_{k-2}, H_{k-1}. Эти множества обладают следующими свойствами: каждое множество H_j измеримо B и содержится в предыдущем H_{j-1}; каждая точка x из H_j принадлежит самое большее к $k-j-1$ множествам η_i; но наиболее важное свойство состоит в том, что часть множества e, содержащаяся в $H_{j-1}-H_j$, отделима B от CE.

Так как часть множества e, содержащаяся в H, неотделима B от CE, то мы заключаем, что часть множества e, содержащаяся в H_{k-1}, также неотделима B от CE. Но H_{k-1} не содержит точек η_i; следовательно, часть множества e, содержащаяся в H_{k-1}, измерима B, а потому отделима B от CE, что приводит нас к противоречию. Ч. т. д.

Установив это, вернемся к доказательству предложенной теоремы. Прежде всего мы доказали, что если E неизмеримо B, то существуют в $\mathcal{J}_t$ два интервала Бэра δ_1 и δ_2 без общих точек и такие, что если e_1 и e_2 — множества значений $f(t)$ соответственно на δ_1 и δ_2, то общая часть $e_1 \cdot e_2$ неотделима B от CE. С другой стороны, мы доказали, что если мы имеем k различных интервалов Бэра δ_1, δ_2, ..., δ_k, расположенных в $\mathcal{J}_t$ и попарно без общих точек, причем общая часть $e_1 \cdot e_2 \ldots e_k$ (где e_k — множество значений $f(t)$ на δ_k), неотделима B от CE, то можно в каждом δ_i найти два интервала Бэра δ_i' и δ_i'' без общих точек и такие, что общая часть $(e_1' \cdot e_1'') \cdot (e_2' \cdot e_2'') \ldots (e_k' \cdot e_k'')$ также неотделима B от CE.

Сравнивая эти два результата, мы видим, что в $\mathcal{J}_t$ существует совершенное множество P такое, что каково бы ни было n совершенное множество P заключено в 2^n интервалах Бэра попарно без общих точек δ_1, δ_2, ..., δ_{2^n} таких, что общая часть соответствующих множеств $e = e_1 \cdot e_2 \ldots e_{2^n}$ неотделима B от CE. Кроме того, мы можем предполагать *порядок* интервалов Бэра δ_i как угодно высоким.

Отсюда следует, что *рассматриваемая функция* $f(t)$ *постоянна на* P. В самом деле, если существуют две точки t_1 и t_2 из P, в которых $f(t_1) \neq f(t_2)$, то в силу *непрерывности* $f(t)$ на $\mathcal{J}_t$ среди интервалов Бэра δ_1, δ_2, ..., δ_{2^n} найдутся два интервала, пусть δ_i и δ_j, содержащие соответственно точки t_1

и t_2 и такие, что соответствующие множества e_1 и e_2 не имеют общей точки. Но это невозможно, так как общая часть $e = e_1 \cdot e_2 \ldots e_k$ неотделима B от CE, а следовательно, она фактически содержит точки.

Итак, функция $f(t)$ постоянна на P; обозначим ее значение на P через x_0. Так как уравнение

$$x_0 = f(t)$$

имеет несчетное множество корней, то $f(t)$ не есть полурегулярная функция, что противоречит гипотезе. Ч. т. д.

Полурегулярное параметрическое изображение при помощи произвольных функций классификации Бэра. Мы теперь обобщим предыдущий результат и докажем следующее предложение:

Теорема. *Всякое аналитическое множество, допускающее полурегулярное изображение при помощи любых функций классификации Бэра, измеримо* B[1]).

Чтобы установить это, возьмем в m-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ аналитическое множество E, допускающее *полурегулярное изображение*

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \ \ldots, \quad x_m = f_m(t),$$

осуществляемое при помощи функций f_i, входящих в классификацию Бэра.

Рассмотрим функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ от $m+1$ действительных переменных, определенную в $(m+1)$ мерной области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m t}$ формулой

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m, t) = [x_1 - f_1(t)]^2 + \\ + [x_2 - f_2(t)]^2 + \ldots + [x_m - f_m(t)]^2.$$

Так как эта функция, очевидно, входит в классификацию Бэра, то множество $\mathcal{E}$ точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m t}$, в которых F обращается в нуль, измеримо B. Ясно, что координаты точек M из $\mathcal{E}$ удовлетворяют уравнениям

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \ \ldots, \quad x_m = f_m(t).$$

---

1) См. мою заметку в Comptes Rendus Acad. Sc. 29 июля 1929 г.

Отсюда следует, что рассматриваемое аналитическое множество E есть проекция $\mathcal{E}$.

Так как $\mathcal{E}$ измеримо B, то (с точностью до счетного множества его точек) оно допускает непрерывное регулярное изображение на порции (0,1) области $\mathcal{J}_\tau$

$$x_1 = \varphi_1(\tau),\quad x_2 = \varphi_2(\tau),\ \ldots,\quad x_m = \varphi_m(\tau),\quad t = \varphi_{m+1}(\tau).$$

Ясно, что m первых уравнений

$$x_1 = \varphi_1(t),\quad x_2 = \varphi_2(t),\ \ldots,\quad x_m = \varphi_m(t)$$

дают нам *непрерывное* изображение рассматриваемого аналитического множества.

Я теперь утверждаю, что это изображение *полурегулярно*. В самом деле, если M_0 $(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_m)$ есть точка E, то существует не более чем счетное множество значений t_ν, удовлетворяющих уравнениям

$$\overset{0}{x}_1 = f_1(t),\quad \overset{0}{x}_2 = f_2(t),\ \ldots,\quad \overset{0}{x}_m = f_m(t),$$

так как изображение $(x_i = f_i(t),\ i = 1, 2, 3, \ldots, m)$ полурегулярное. Но каждой системе чисел $\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_m, t$, удовлетворяющей этим уравнениям, соответствует одна точка $\mathcal{E}$ и, следовательно, одно и только одно значение τ_0 переменного τ. Отсюда следует, что каждой точке M_0 из E соответствует самое большее счетное множество значений τ, удовлетворяющих уравнениям

$$x_1 = \varphi_1(\tau),\quad x_2 = \varphi_2(\tau),\ \ldots,\quad x_m = \varphi_m(\tau).$$

Значит, это непрерывное изображение множества E полурегулярно, откуда и следует измеримость B множества E. Ч. т. д.

В качестве обобщения этого результата мы имеем:

Если параметрическое изображение

$$x_1 = f_1(t),\quad x_2 = f_2(t),\ \ldots,\quad x_m = f_m(t),$$

осуществляемое при помощи любых функций классификации Бэра, полурегулярно на множестве e, измеримом B и лежащем в $\mathcal{J}_t$, то множество E тех точек, которые получаются, когда t пробегает множество e, измеримо B.

В самом деле, так как e измеримо B, существует непрерывное регулярное изображение e:

$$t=\varphi(\tau),$$

если пренебречь счетным множеством точек e. В этих условиях сложные функции

$$x_1=f_1[\varphi(\tau)],\quad x_2=f_2[\varphi(\tau)],\ \ldots,\ x_m=f_m[\varphi(\tau)]$$

дают нам, очевидно, полурегулярное изображение E, осуществляемое функциями классификации Бэра. Следовательно, E измеримо B.

Приложение к проекциям множеств, измеримых B. Мы видели (стр. 166), что ортогональная проекция E измеримого B множества $\mathfrak{E}$, расположенного в m-мерной области на m'-мерную область, где $m'<m$, измерима B, если проекции двух различных точек $\mathfrak{E}$ различны.

Как обобщение этой теоремы мы имеем:

Теорема. *Ортогональная проекция E множества $\mathfrak{E}$, измеримого B и расположенного в m-мерной области на m'-мерную область $m'<m$, измерима B, если каждая точка E есть проекция не более чем счетного числа точек множества $\mathfrak{E}$* [1]).

Чтобы убедиться в этом, достаточно взять непрерывное и регулярное изображение $\mathfrak{E}$, $x_1=f_1(t)$, $x_2=f_2(t)$, $\ldots$, $x_m=f_m(t)$. Первые m' уравнений дают непрерывное параметрическое изображение E, и легко видеть, что оно *полурегулярно* в силу гипотезы, сделанной относительно точек E. Следовательно, E измеримо B. Ч. т. д.

Решета

Общее определение решета [2]). Предыдущие исследования об аналитических множествах устанавливали свойства

---

[1]) См. мою заметку «Sur la représentation paramétrique semi-régulière des ensembles» (Comptes Rendus Acad. Sc. 29 июля 1929 г.). Ср. с результатами П. С. Новикова, касающимися неявных функций [16].

[2]) Я ввел в явном виде общее понятие решета в своем мемуаре «Sur les ensembles analytiques», Fund. Math., т. X, 1926, стр. 20. См. также работу Серпинского: «Le crible de M. Lusin et l'opération A dans les espaces abstraits», Fund. Math., т. XI, стр. 16.

этих множеств, не зависящие от понятия трансфинитного. Но теперь пора ввести одно понятие, которое, как мы увидим, позволит установить прямую связь между аналитическими множествами, неизмеримыми B и трансфинитным.

Возьмем $m+1$-мерную область $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$, рассмотрим в этой области любое множество точек C. Пусть $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ есть точка области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ и D_M — прямая, параллельная оси OY и проведенная через точку M.

Обозначим через R_M множество точек C, которые принадлежат к D_M. Возможны только два случая.

Первый случай. Линейное множество R_M *вполне упорядочено* в положительном направлении оси Y.

Второй случай. Линейное множество D_M *не есть* вполне упорядоченное, если таким же образом устанавливать порядок.

Обозначим через $\mathfrak{E}$ совокупность точек M области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, для которых имеет место первый случай, и через E множество точек M этой области, для которых наблюдается второй случай.

Множество E есть дополнение к множеству $\mathfrak{E}$, и мы видим, что это множество $\mathfrak{E}$ *названо положительным образом*, тогда как определение множества E *отрицательно*.

Однако в дальнейшем мы увидим, что если C—аналитическое множество, то имеет место как раз обратное: мы докажем, что E — *аналитическое множество* и, следовательно, допускает положительное определение (параметрическое изображение, проекция множества, измеримого B). Что же касается до множества $\mathfrak{E}$, то мы не имеем для него другого *положительного* определения, кроме того, которое только что было дано.

Чтобы сократить изложение, мы введем следующую терминологию. Принимая во внимание роль $m+1$-мерного множества C, заключающуюся в том, что оно автоматически просеивает точки m-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, пропуская точки совокупности $\mathfrak{E}$ и задерживая те, которые входят в E, мы это множество C назовем $m+1$-*мерным решетом*.

Согласно этому наименованию мы назовем *просеянным при помощи решета* C именно это множество E (но не множество $\mathfrak{E}$).

Среди различных решет C мы можем различать следующие:

$m+1$-мерное решето C называется *счетным*, если каждая прямая D, параллельная оси OY, пересекает C самое большее в счетном числе точек. Решето C мы назовем *несчетным* в противном случае; в этом случае существует такая точка M области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \dots x_m}$, что прямая D_M, параллельная оси OY и проведенная через M, пересекает решето C по несчетному линейному множеству R_M.

Изучение аналитических решет. Так как каждое множество C, расположенное в области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \dots x_m y}$, может быть принято за решето, то изучение просеянных множеств E представляет значительные трудности. Поэтому сколько-нибудь значительные результаты получаются лишь если ограничиваться частными семействами решет. Мы изучим случай *аналитического решета*.

Теорема. *Всякое множество, просеянное при помощи аналитического решета, есть аналитическое множество*[1]).

Для определенности мы рассмотрим только *плоские* решета, так как изучение решета, расположенного в области любого числа измерений, сводится к изучению плоских решет: для этого достаточно преобразовать область $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \dots x_m}$ в линейную область $\mathcal{J}_x$ при помощи взаимно однозначного и взаимно непрерывного преобразования; если мы прибавим к уравнениям, определяющим это преобразование (стр. 170), тождество $y = y$, то мы получим аналогичное преобразование области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \dots x_m y}$ в плоскую область $\mathcal{J}_{xy}$. Легко видеть, что таким образом мы преобразуем каждое $m+1$-мерное решето в плоское решето и что если рассматриваемое $m+1$-мерное решето есть измеримое B или аналитическое, то таким же будет и преобразованное.

---

[1]) Это обобщение одной теоремы о решетах весьма специального вида, которую я дал в мемуаре «Sur les ensembles analytiques» (Fund, Math., 1926, стр. 21). Другое обобщение в области проективных множеств было опубликовано Серпинским в его заметке «Sur quelques propriétés des ensembles projectifs» (Comptes Rendus Acad. Sc., 24 октября 1927, теорема VI).

Аналогичное обобщение было мною рассмотрено в моих лекциях по теории проективных множеств (см. стр. 270 и 289 этой книги).

Установив это, возьмем в плоской области $\mathcal{J}_{xy}$ любое решето C. В данный момент мы относительно природы C не делаем никаких гипотез.

Пусть

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \\ t=F(x, y) \end{array}\right\} \tag{1}$$

— формулы, определяющие преобразование области $\mathcal{J}_{xy}$ в порцию $(0,1)$ линейной области $\mathcal{J}_t$; функции φ, ψ и F — непрерывны.

Рассмотрим в то же время бесконечную последовательность функций

$$t_1=f_1(\tau), \quad t_2=f_2(\tau), \ldots, \quad t_n=f_n(\tau), \ldots,$$

непрерывных на порции $(0,1)$ области $\mathcal{J}_\tau$ и обладающих следующим свойством: какова бы ни была последовательность иррациональных чисел $t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0, \ldots$, заключенных между 0 и 1, существует иррациональное число τ_0, $0<\tau_0<1$, такое, что

$$f_n(\tau_0)=t_n^0 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_n$ точку области $\mathcal{J}_{xy}$, координаты x_n, y_n которой определяются формулами

$$x_n=\varphi[f_n(\tau)], \quad y_n=\psi[f_n(\tau)].$$

Если мы заставим τ пробегать область $\mathcal{J}_\tau$, то каждая точка $\mathfrak{M}_n$ пробегает всю область $\mathcal{J}_{xy}$ независимо от движения остальных точек, таким образом, что, какова бы ни была последовательность фиксированных точек $\mathfrak{M}_1^0, \mathfrak{M}_2^0, \ldots, \mathfrak{M}_n^0, \ldots$, существует иррациональное число τ_0 такое, что при $\tau=\tau_0$ подвижные точки $\mathfrak{M}_n$ совпадают соответственно с фиксированными точками $\mathfrak{M}_n^0$.

Давая n некоторое фиксированное значение, изучим природу множества H_n точек τ, для которых соответствующая точка $\mathfrak{M}_n$ принадлежит решету C.

Так как функции $\varphi[f_n(\tau)]$ и $\psi[f_n(\tau)]$ непрерывны на $\mathcal{J}_\tau$, то легко видеть, что рассматриваемое множество H_n есть прообраз решета C при непрерывном преобразовании

$$x=\varphi[f_n(\tau)], \quad y=\psi[f_n(\tau)].$$

Следовательно, если решето C измеримо B или аналитическое, то таким же будет и множество H_n.

Для того чтобы все точки $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n, \ldots$ принадлежали решету C, необходимо и достаточно, чтобы τ принадлежало к общей части

$$H = H_1 \cdot H_2 \ldots H_n \ldots$$

Из предшествующего следует, что H измеримо B или аналитическое, смотря по тому, будет ли C измеримым B или аналитическим.

Установив это, исследуем природу множества θ тех точек τ, для которых мы имеем одновременно следующие равенства или неравенства:

$$\varphi[f_1(\tau)] = \varphi[f_2(\tau)] = \ldots = \varphi[f_n(\tau)] = \ldots,$$
$$\psi[f_1(\tau)] > \psi[f_2(\tau)] > \ldots > \psi[f_n(\tau)] > \ldots$$

Мы видим немедленно, что θ *измеримо* B, так как все эти сложные функции непрерывны на $\mathcal{J}_\tau$.

Если τ принадежит к общей части $\theta \cdot H$, то соответствующие точки $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n, \ldots$ принадлежат решету C, расположены на одной и той же прямой, параллельной оси OY, и образуют нисходящую последовательность точек. Следовательно, точка x, определенная формулой $x = \varphi[f_1(\tau)]$, принадлежит множеству E, просеянному при помощи данного решета C, когда τ принадлежит к $\theta \cdot H$. И так как мы, очевидно, можем получить указанным способом все нисходящие последовательности точек решета C, то отсюда заключаем, что просеянное множество E *есть множество значений функции* $\varphi[f_1(\tau)]$, *непрерывной на* $\theta \cdot H$.

На основании сказанного относительно природы множеств H и θ и в силу непрерывности $\varphi[f_1(\tau)]$ на $\mathcal{J}_\tau$ мы окончательно заключаем, что просеянное множество E *аналитическое*. Ч. т. д.

Таким образом, мы не выходим из границ семейства аналитических множеств, производя операцию, состоящую во взятии просеянного множества, если только решето аналитическое. В дальнейшем мы дадим этой теореме значительное расширение, распространив ее на семейство *проективных* множеств (стр. 289).

Мы дополним этот результат следующим замечанием: если мы расклассифицируем точки M области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ в зависимости не от вполне упорядоченности, но от *рассеянности* линейного множества R_M, по которому прямая D_M, параллельная оси OY и проходящая через M, пересекает данное множество C, лежащее в $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$, то мы придем к тому же результату:

Множество точек M области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, в которых прямая D_M, проведенная через M параллельно OY, пересекает данное аналитическое множество C, расположенное в $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$ по линейному множеству R_M не рассеянному, есть также аналитическое множество.

Чтобы притти к этому результату, достаточно повторить слово в слово предыдущее рассуждение, но заставить множество чисел $\psi[f_1(\tau)]$, $\psi[f_2(\tau)]$, ..., $\psi[f_n(\tau)]$, ... быть *плотным на себе* [1]). В этих условиях множество θ также измеримо B и все заключения остаются в силе. Ч. т. д.

Прежде чем продвинуть дальше изучение аналитических решет, следует ввести одно важное предварительное понятие.

Пусть C — любое решето, лежащее в $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$, и E — множество на $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, просеянное при помощи C. Возьмем любую точку M в $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$. Если M не принадлежит к E, то прямая D_M, проведенная через M параллельно оси OY, пересекает решето по вполне упорядоченному множеству, следуя положительному направлению оси OY; пусть R_M это множество. Так как R_M вполне упорядочено, то R_M, а следовательно, и самой точке M соответствует некоторое вполне определенное трансфинитное число второго класса (или конечное); мы его обозначим через α_M. Таким образом, каждой точке M из $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, не принадлежащей к E, отвечает вполне определенное трансфинитное (или конечное) число α_M.

Установив это, рассмотрим любое множество θ, расположенное в $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ и не содержащее ни одной точки E. Каждой точке M из θ соответствует вполне определенное

---

[1]) Множество называется *плотным* на себе, если каждая из его точек есть предельная для этого множества. См. Р. Бэр, Теория разрывных функций, ГТТИ, М. — Л., 1932, стр. 60.

трансфинитное (или конечное) число α_M; если M пробегает множество θ, то α_M меняется.

В этих условиях *мы скажем, что решето C ограничено на θ, если существует трансфинитное число β второго класса, фиксированное и превосходящее все трансфинитные числа α_M, соответствующие точкам M из θ. Решето C называется неограниченным на θ в противном случае*[1]).

Если решето C ограничено на θ, то существует некоторое постоянное множество W, счетное и вполне упорядоченное, образованное из любых элементов и *более протяженное*, чем каждое из вполне упорядоченных множеств R_M, какова бы ни была точка M на θ; это значит, что R_M подобно сегменту W, когда M принадлежит к θ.

Установив это понятие, мы воспользуемся следующей важной теоремой:

Теорема. *Всякое аналитическое решето C ограничено на каждом аналитическом множестве θ, не имеющем общих точек с множеством E, просеянным при помощи C*[2]).

Чтобы убедиться в этом, мы докажем, что придем к противоречию, если допустим существование аналитического множества θ без общих точек с E и такого, что C неограничено на θ.

С этой целью обозначим через H множество точек C, проекции которых на $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ принадлежат к θ. Так как множества C и θ аналитические, то и H будет таким же.

Так как каждая прямая D, параллельная оси OY, пересекает H самое большее в счетном числе точек, то мы можем применить теорему следующей главы, касающуюся структуры аналитических множеств, обладающих этим свойством (стр. 245 и 253). Следовательно, множество H составлено из счетного множества аналитических множеств $H_1, H_2, \ldots$ $\ldots, H_n, \ldots$, расположенных соответственно на однозначных

---

1) Я ввел понятия «ограниченного» и «неограниченного решета» в мемуаре «Sur les ensembles analytiques» (Fund. Math., т. X, 1926, стр. 70).

2) Эта теорема есть обобщение аналогичной теоремы, касающейся решет специального вида и доказанной в цитированном мемуаре.

поверхностях $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, измеримых B, из которых каждая полностью лежит под или над другой.

Установив это, возьмем *непрерывное* параметрическое изображение θ

$$x_1 = \varphi_1(\tau),\ x_2 = \varphi_2(\tau),\ \ldots,\ x_m = \varphi_m(\tau)$$

и пусть

$$x_1 = f_1^{(k)}(t_k),\ x_2 = f_2^{(k)}(t_k),\ \ldots,\ x_m = f_m^{(k)}(t_k),\ y = g^{(k)}(t_k)$$

— параметрическое изображение множества H_k на порции (0,1) области $\mathcal{J}_{t_k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Будем теперь поступать следующим образом. Возьмем поверхность S_k и обозначим через C_k часть C, лежащую *под* S_k. Мы выбираем целое число k_1 таким образом, чтобы C_{k_1} было неограничено на проекции множества H_{k_1}. Выбрав k_1 таким образом, мы берем на порциях (0,1) соответствующих областей $\mathcal{J}_\tau$ и $\mathcal{J}_{t_{k_1}}$ два интервала Бэра порядка 1, пусть δ_1 и $\delta_1^{(k_1)}$, такие, что если τ и t_k пробегают соответственно δ_1 и $\delta_1^{(k_1)}$ в первых m уравнениях соответствующих параметрических изображений и если мы берем общую часть ϑ_1 двух полученных при этом аналитических множеств, то C_{k_1} неограничено на ϑ_1.

Будем поступать таким же образом на ϑ_1. Мы берем целое положительное k_2 такое, что поверхность S_{k_2} находится *под* S_{k_1} и в то же время C_{k_2} неограничено на общей части ϑ_1 и проекции множества H_{k_2}. Мы берем на порциях (0,1) областей $\mathcal{J}_\tau$, $\mathcal{J}_{t_{k_1}}$, $\mathcal{J}_{t_{k_2}}$ соответственно три интервала Бэра порядка 2: δ_2, $\delta_2^{(k_1)}$, $\delta_2^{(k_2)}$, из которых два первых содержатся соответственно в δ_1 и $\delta_1^{(k_1)}$ и такие, что если τ, t_{k_1} и t_{k_2} пробегают соответственно δ_2, $\delta_2^{(k_1)}$ и $\delta_2^{(k_2)}$ в m первых уравнениях соответствующих параметрических изображений и если мы берем общую часть ϑ_2 трех полученных при этом аналитических множеств, то C_{k_2} неограничено на ϑ_2.

Будем поступать таким же образом на ϑ_2; найдется поверхность S_{k_3} и часть C_{k_3} решета C, неограниченная на ϑ_3. Здесь ϑ_3 есть общая часть четырех аналитических множеств, полученных, если заставить τ, t_{k_1}, t_{k_2} и t_{k_3} пробегать соответственно интервалы Бэра порядка 3: δ_3, $\delta_3^{(k_1)}$, $\delta_3^{(k_2)}$ и $\delta_3^{(k_3)}$, из которых первые три содержатся соответственно в δ_2, $\delta_2^{(k_1)}$, $\delta_2^{(k_2)}$ ранее определенных, и так далее.

Мы получим таким образом аналитические множества ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ..., каждое из которых содержится в предшествующем, причем все они имеют общую точку M, принадлежащую множеству θ. В самом деле, мы, очевидно, получим эту точку M, полагая $\tau = \tau_0$ в параметрическом изображении θ, где τ_0 есть иррациональное число, принадлежащее всем интервалам Бэра δ_1, δ_2, δ_3, ...

С другой стороны, эта точка M, очевидно, принадлежит к ортогональной проекции на $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ множества H_{k_ν}, каково бы ни было ν [1]). Следовательно, прямая D_M, параллельная OY и проведенная через M, непременно пересекает множества $H_{k_1}, H_{k_2}, \ldots, H_{k_\nu}, \ldots$ Но эти множества расположены соответственно на поверхностях $S_{k_1}, S_{k_2}, \ldots, S_{k_\nu}, \ldots$, каждая из которых лежит *под* предыдущей. Следовательно, прямая D_M пересекает решето C по *нисходящей* последовательности точек, что невозможно, так как точка M не принадлежит к просеянному множеству E. Ч. т. д.

Мы дополним этот результат следующими замечаниями:

Замечание I. Доказанная теорема может быть перенесена на случай определения аналитического множества по признаку *рассеянности*. Чтобы убедиться в этом, следует начать с общих рассмотрений.

Если дано некоторое множество точек E, то мы обозначим через $E^{(1)}$ результат произведенной над E операции, состоящей в том, что из E удаляют все его *изолированные* точки. Если произвести такую же операцию над $E^{(1)}$, мы получим множество, которое обозначим через $E^{(2)}$. Если произвести ее над $E^{(2)}$, то получим множество $E^{(3)}$ и т. д.

---

[1]) В самом деле, так как функции φ и f_i *непрерывны*, мы, очевидно, получим ту же точку M, полагая $t_{k_\nu} = t^0_{k_\nu}$ в m первых уравнениях параметрического изображения H_{k_ν}, где $t^0_{k_\nu}$ есть иррациональное число, принадлежащее всем интервалам Бэра $\delta_\nu^{(k_\nu)}$, $\delta_{\nu+1}^{(k_\nu)}$, $\delta_{\nu+2}^{(k_\nu)}, \ldots$, каково бы ни было *фиксированное* число ν.

Мы образуем таким образом множества

$$E,\ E^{(1)},\ E^{(2)},\ \ldots,\ E^{(\omega)},\ E^{(\alpha)},\ \ldots \mid \Omega,$$

каждое из которых содержится в предшествующем, полагая по определению, что если α второго рода, то $E^{(\alpha)}$ будет общей частью предшествующих множеств.

Установив это, мы мгновенно докажем, что, каково бы ни было начальное множество E, существует некоторое число β, начиная с которого все рассматриваемые множества тождественны, т. е.

$$E^{(\beta)} \equiv E^{(\beta+1)} \equiv E^{(\beta+2)} \equiv \ldots \mid \Omega.$$

Если данное множество E — рассеянное, то множества

$$E^{(\beta)} = E^{(\beta+1)} = \ldots$$

будут *пустыми*. В этом случае наименьшее число β, обладающее этим свойством, называется *порядком* рассеянного множества E. Напротив, если множество E не есть рассеянное, то множество $E^{(\beta)} = E^{(\beta+1)} = \ldots$ есть наибольшая часть E, *плотная в себе*.

Установив это, рассмотрим в $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_my}$ аналитическое множество C и обозначим через E множество точек M из $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ таких, что проведенная через M параллельно оси OY прямая D_M пересекает E по линейному множеству R_M, которое *не есть рассеянное*. Ранее мы видели, что E есть *аналитическое множество*.

Если точка M не принадлежит к E, то ей отвечает трансфинитное (или конечное) число α_M, которое служит порядком рассеянного множества R_M. Пусть θ есть множество точек, расположенное в $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ и не имеющее общих точек с E. Если числа α_M, соответствующие точкам M из θ, все меньше некоторого трансфинитного числа β второго класса, то множество C называется *ограниченным на θ в смысле рассеянности.*

С этими определениями теорема, вполне аналогичная только что доказанной, звучит так:

Аналитическое множество C ограничено в смысле рассеянности на каждом аналитическом множестве θ, не имеющем общих точек с E.

Доказательство вполне аналогично предыдущему и состоит в построении аналитических множеств $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_\nu, \ldots,$

у которых имеется общая точка M, принадлежащая к θ, и однако же таких, что соответствующее множество R_M не есть рассеянное.

Замечание II. Вернемся теперь к случаю полной упорядоченности. Назовем *ограниченным решетом* всякое решето C, которое ограничено на дополнении к множеству E, просеянному при помощи C. Ранее мы видели, что каждое *аналитическое* решето C непременно ограничено на всяком аналитическом множестве θ, не имеющем общих точек с E. Следовательно, если просеянное множество E измеримо B, то аналитическое решето C непременно будет *ограниченным* решетом.

Итак, мы пришли к заключению, что *для каждого неограниченного аналитического решета просеянное им множество неизмеримо B.*

К сожалению, эта теорема необратима, так как аналитическое решето может быть ограниченным и тогда, когда просеянное им множество неизмеримо B. Тем не менее, существует семейство решет, для которых обратное предложение все же имеет место: это семейство решет *счетных и измеримых B.*

Изучение счетных решет, измеримых B. Для изучения важных свойств этих решет полезным инструментом является понятие *конституанты просеянного множества E и его дополнения $\mathcal{E}$.*

Рассмотрим в области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m y}$ решето C любой природы и обозначим соответственно через E и $\mathcal{E}$ множество, просеянное при помощи решета C, и его дополнение; множества E и $\mathcal{E}$ расположены в области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$.

Возьмем в области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ какую-нибудь точку M и обозначим через D_M параллель к оси OY, проведенную через M; эта прямая пересекает решето C по линейному множеству точек, которое мы обозначим через R_M.

Если точка M принадлежит к $\mathcal{E}$, то множество R_M вполне упорядочено в положительном направлении оси OY; в этом случае точке M соответствует вполне определенное трансфинитное число второго класса (или конечное); мы его обозначим через α_M.

Если точка M принадлежит к E, множество R_M уже не будет вполне упорядоченным, если порядок понимать в том же смысле. Но в этом случае на прямой D_M непременно найдется такой сегмент $(-\infty \leqslant y \leqslant N)$, что часть R_M, лежащая на нем, есть вполне упорядоченное множество при тех же предположениях относительно порядка, тогда как сегмент большей длины $(-\infty \leqslant y \leqslant N+\varepsilon)$, где ε — как угодно малое положительное число, уже этим свойством не обладает. Так как такая точка N на прямой D_M *только одна*[1]), то единственной будет и вполне упорядоченная часть R_M, заключенная в $(-\infty \leqslant y \leqslant N)$. Следовательно, точке M соответствует вполне определенное трансфинитное число второго класса (или конечное), которое мы также обозначим через α_M.

Установив это, примем следующие определения:

Назовем *конституантой* (α) *просеянного множества* E или просто *конституантой* E_α множество тех точек M из E, которые соответствуют данному числу α, $\alpha_M=\alpha$.

Назовем также *конституантой* (α) *дополнения* $\mathscr{E}$ *к просеянному множеству* E или просто *конституантой* $\mathscr{E}_\alpha$ множество тех точек M из $\mathscr{E}$, для которых мы снова имеем $\alpha_M=\alpha$, где α — фиксированное число конечное или трансфинитное второго класса.

Легко видеть, что конституанты E_α и $\mathscr{E}_\alpha$ попарно не имеют общих точек и, следовательно, множества E и $\mathscr{E}$ полностью разлагаются на свои конституанты:

$$E=E_0+E_1+E_2+\ldots+E_\omega+\ldots+E_\alpha+\ldots|\,\Omega$$

и

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0+\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\ldots+\mathscr{E}_\omega+\ldots+\mathscr{E}_\alpha+\ldots|\,\Omega.$$

Складывая эти равенства, мы получим разложение всей области $\mathscr{J}$ в последовательность множеств, перенумерованных при помощи конечных чисел и трансфинитов второго класса

$$\mathscr{J}=E_0+\mathscr{E}_0+E_1+\mathscr{E}_1+\ldots+E_\omega+\mathscr{E}_\omega+ \\ +\ldots+E_\alpha+\mathscr{E}_\alpha+\ldots|\,\Omega.$$

Установив это, мы докажем следующую важную теорему:

---

[1]) Число N может быть, в частности, равным отрицательной бесконечности.

Теорема. *Если данное решето C счетно и измеримо B, то все конституанты E_α и $\mathcal{E}_\alpha$ измеримы B.*

Покажем сначала, что начальные конституанты E_0 и $\mathcal{E}_0$ измеримы B. Это очевидно для $\mathcal{E}_0$, так как если решето C счетно и измеримо B, то проекция C на область $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ измерима B (стр. 178), но очевидно, что конституанта $\mathcal{E}_0$ есть дополнение к этой проекции.

Чтобы изучить природу конституанты E_0, нам понадобится теорема о структуре множеств, измеримых B и пересекаемых каждой параллелью D к оси OY самое большее по счетному множеству (стр. 245). В силу этой теоремы точки решета C распределяются на счетном множестве однозначных поверхностей $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, измеримых B, определенных всюду на $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ и таких, что про любые две из этих поверхностей можно сказать, что одна из них лежит целиком над или целиком под другой. Установив это, обозначим через H_n множество точек решета C, расположенных на поверхности S_n; множество H_n измеримо B и однозначно по отношению к $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$. Обозначим через Γ_n множество точек решета C, расположенных *под* поверхностью S_n; легко видеть, что проекция Γ_n на область $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ измерима B. Отсюда мы заключаем, что *множество точек из H_n, проекции которых на $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ не принадлежат к проекции Γ_n, также измеримо B*; мы обозначим это множество через θ_n. Так как однозначных множеств $\theta_1, \theta_2, \ldots$ лишь счетное множество, то соединение S их проекций на $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ измеримо B. Но точки M множества S, очевидно, обладают тем характеристическим свойством, что прямая D_M, проведенная через M параллельно оси OY, пересекает решето C по линейному множеству R_M, имеющему начальную точку, т. е. такую точку, у которой координата y меньше, чем у всех остальных точек из R_M. Отсюда мы заключаем, что если из $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ удалить точки $\mathcal{E}_0$ и S, то множество оставшихся точек совпадает с E_0. Следовательно, E_0 измеримо B.

Чтобы установить измеримость B конституант E_α и $\mathcal{E}_\alpha$, мы введем понятие *производного решета* C': это решето, которое получается из данного решета C удалением из каждого множества H_n всех точек множества $\mathfrak{h}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Легко видеть, что производное решето C' есть вполне определенное счетное решето, измеримое B, *имеющее то же просеянное множество* E, и что если C' рассматривать как множество точек в $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$, то оно содержится в решете C. Но наиболее важным свойством производного решета C' является следующее: *чтобы перейти от C к C', надо удалить на каждой прямой D, параллельной оси OY, начальную точку решета C (если такая точка существует).* Из этого следует, что начальные конституанты множеств E и $\mathcal{E}$, определенные производным решетом C', совпадают соответственно с E_0+E_1 и $\mathcal{E}_0+\mathcal{E}_1$.

Установив это, мы образуем трансфинитную последовательность производных решет

$$C,\ C',\ C'',\ \ldots,\ C^{(\nu)},\ \ldots,\ C^{(\omega)},\ \ldots,\ C^{(\alpha)},\ \ldots \mid \Omega.$$

Если α первого рода, $\alpha=\alpha^*+1$, то решето $C^{(\alpha)}$ определяется как производное от решета $C^{(\alpha^*)}$; если α второго рода, то решето $C^{(\alpha)}$ есть общая часть всех ранее определенных решет. Легко видеть, что все решета $C^{(\alpha)}$ имеют одно и то же просеянное множество E и что начальные конституанты множеств E и $\mathcal{E}$, определенные решетом $C^{(\alpha)}$, совпадают соответственно с суммами

$$E_0+E_1+\ldots+E_\omega+\ldots+E_\alpha$$

и

$$\mathcal{E}_0+\mathcal{E}_1+\ldots+\mathcal{E}_\omega+\ldots+\mathcal{E}_\alpha,$$

образованными из конституант E_β и $\mathcal{E}_\beta$, предшествующих соответственно E_α и $\mathcal{E}_\alpha$.

Так как начальные конституанты всегда измеримы B, то и написанные выше суммы также. Отсюда следует, что и конституанты E_α и $\mathcal{E}_\alpha$ также измеримы B, что и доказывает предложенную теорему. Ч. т. д.

Одно из наиболее важных приложений предшествующих рассмотрений относится к самим аналитическим множествам. В самом деле, мы теперь имеем возможность доказать следующее предложение:

Теорема. *Для того чтобы аналитическое множество E, просеянное при помощи счетного решета C, измеримого B,* *было само измеримым B, необходимо и достаточно, чтобы решето C было ограниченным.*

Условие необходимо, так как каждое аналитическое решето C ограничено на всяком аналитическом множестве θ, не имеющем общих точек с множеством E, просеянным при помощи C. Следовательно, если E измеримо B, то и его дополнение $\mathfrak{E}$ тоже измеримо B, а потому решето C ограничено.

Условие достаточно. В самом деле, если решето C ограничено, то множество $\mathfrak{E}$ *есть сумма счетного множества* конституант $\mathfrak{E}_\alpha$, так как все остальные конституанты $\mathfrak{E}$ *пусты*. А так как каждая конституанта $\mathfrak{E}_\alpha$ измерима B, то множество $\mathfrak{E}$ также измеримо B. Следовательно, просеянное множество E *измеримо* B. Ч. т. д.

Можно было бы спросить себя, нельзя ли рассматривать всякое аналитическое множество как просеянное при помощи счетного решета, измеримого B. Если это так, то практическая польза, если уже не говорить о теоретическом значении изучения счетных решет, измеримых B, значительно возрастает. Мы увидим, что действительно, *каково бы ни было аналитическое множество E, можно эффективно определить решето C счетное, измеримое B и некоторой чрезвычайно элементарной природы так, чтобы E было просеяно при помощи решета C.*

Чтобы убедиться в этом, введем следующее определение. Рассмотрим бесконечную последовательность замкнутых сегментов

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu, \ldots$$

с *иррациональными* концами, расположенных на оси OY; мы предполагаем, что эти сегменты попарно не имеют общих точек и общих концов. Эта последовательность $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu, \ldots$ называется *восходящей*, если индекс сегмента возрастает в положительном направлении оси OY; это значит, что каждый из этих сегментов лежит выше предшествующего.

Установив это, возьмем в области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ какое-либо аналитическое множество E. Пусть H есть *элементарное множество*, расположенное в $m+1$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$, ортогональной проекцией которого на область $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ является E.

По самому определению элементарное множество H есть общая часть $H = S_1 \cdot S_2 \ldots S_n \ldots$, где каждое множество S_n есть сумма счетного множества параллелепипедов Бэра $\pi_i^{(n)}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, расположенных в $m+1$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$ и не имеющих попарно общих точек. Эти параллелепипеды Бэра $\pi_i^{(n)}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ называются *параллелепипедами* ранга n; порядок каждого параллелепипеда ранга n равен n. Кроме того, известно, что всякий из параллелепипедов $\pi_i^{(n)}$ ранга n содержится во вполне определенном параллелепипеде $\pi_j^{(n-1)}$ предшествующего ранга $n-1$ и содержит счетное множество параллелепипедов следующего, $n+1$-го ранга (стр. 141).

Преобразуем теперь элементарное множество H. Так как ортогональная проекция на область $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ некоторого $m+1$-мерного параллелепипеда π, ориентированного по осям OX_1, OX_2, $\ldots$, OX_m, OY, очевидно, не изменится, если переместить или сжать параллелепипед в направлении оси OY, то мы можем предположить, что ортогональные проекции параллелепипедов $\pi_i^{(1)}$ ранга 1 на ось OY образуют *восходящую* последовательность сегментов $\sigma_i^{(1)}$ с иррациональными концами; мы их назовем *сегментами ранга* 1. Вообще, каков бы ни был параллелепипед $\pi_i^{(n-1)}$ ранга $n-1$, мы можем предполагать, что ортогональные проекции на ось OY содержащихся в нем параллелепипедов $\pi_i^{(n)}$ ранга n образуют *восходящую* последовательность соответствующих сегментов $\sigma_j^{(n)}$ с иррациональными концами; мы называем эти сегменты $\sigma_j^{(n)}$ *сегментами ранга n*.

Таким образом, каково бы ни было n, сегменты $\sigma_i^{(n)}$ ранга n не имеют попарно общих точек, а сегменты $\sigma_j^{(n+1)}$ ранга $n+1$, содержащиеся в некотором $\sigma_i^{(n)}$ ранга n, всегда образуют восходящую последовательность.

Наконец, сделаем следующее замечание. Расположим рациональные точки оси OY в простую бесконечную последовательность r_1, r_2 $\ldots$, r_n, $\ldots$. Я теперь утверждаю, что, каково бы ни было целое положительное n, можно предположить рациональную точку r_n не принадлежащей ни одному из сегментов $\sigma_i^{(n)}$ ранга n. В самом деле, когда сегмент $\sigma_i^{(n-1)}$

ранга $n-1$ определен, мы можем образовать в $\sigma_i^{(n-1)}$ восходящую последовательность сегментов $\sigma_i^{(n)}$ ранга n, содержащихся в $\sigma_i^{(n-1)}$ так, чтобы ни один из них не содержал рациональную точку r_n.

Во всем дальнейшем мы предположим, что выбор параллелепипедов всех рангов и, следовательно, элементарного множества H сделан указанным образом. Данное аналитическое множество E есть ортогональная проекция на область $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ так построенного элементарного множества H (стр. 141).

Установив это, обозначим через C множество точек области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_my}$, *расположенных на верхних гранях всех построенных таким образом параллелепипедов* $\pi_i^{(n)}$ ($n=1, 2, 3, \ldots$). Легко видеть, что C есть соединение счетного множества однозначных множеств, измеримых B и весьма простых, и что каждая прямая D, параллельная оси OY, пересекает C самое большее по счетному множеству точек. Следовательно, множество C есть счетное решето, измеримое B и весьма элементарной структуры. В дальнейшем так построенное решето C мы будем называть ***элементарным решетом***.

Мы теперь докажем следующую теорему:

Теорема. *Всякое аналитическое множество может быть просеяно при помощи элементарного решета.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать, что ранее рассмотренное нами аналитическое множество E можно считать просеянным при помощи построенного элементарного решета C.

Пусть M — любая точка области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$. Обозначим через D_M прямую, параллельную оси OY и проведенную через M; пусть R_M — множество точек C, принадлежащих D_M.

Я теперь утверждаю, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы линейное множество R_M не было вполне упорядоченным в положительном направлении оси ординат, состоит в том, чтобы прямая D_M содержала точку элементарного множества H.

Условие необходимо. В самом деле, если R_M не есть вполне упорядоченное в условленном смысле, то можно определить неограниченную *нисходящую* последовательность точек из R_M: $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$, каждая из которых ниже предыдущей. Так как ортогональные проекции на ось OY всех параллелепипедов $\pi_i^{(n)}$ фиксированного ранга n образуют счетное множество сегментов $\sigma_i^{(n)}$, попарно без общих точек и вполне упорядоченное в положительном направлении оси OY, то все точки $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$, начиная с некоторого индекса ν, принадлежат одному и тому же параллелепипеду $\pi_i^{(n)}$ ранга n; пусть π_n этот параллелепипед ранга n.

Неограниченная последовательность $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$, очевидно, образована из параллелепипедов всех рангов, вложенных друг в друга, причем каждый из них содержит все точки $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$, кроме конечного числа их. Следовательно, точка N_0, общая всем параллелепипедам $\pi_1, \pi_2, \ldots$ $\ldots, \pi_\nu, \ldots$, наверное, принадлежит прямой D_M. Кроме того, все координаты $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, y$ точки N_0 — иррациональные числа. Это очевидно для координат x_i^0, так как ортогональная проекция π_n на область $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ есть параллелепипед *Бэра порядка п*. Но ортогональная проекция π_n на ось OY есть сегмент ранга n и, следовательно, не содержит ни одной из n первых рациональных точек бесконечной последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, в которую мы расположили все рациональные точки оси OY (стр. 193). Итак, число y^0 иррационально.

Отсюда следует, что точка N_0 области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$ принадлежит к элементарному множеству H.

Условие достаточно. В самом деле, если прямая D_M содержит точку N элементарного множества H, то, очевидно, эта точка N есть предел *нисходящей* последовательности точек множества R_M, значит, R_M не является вполне упорядоченным в положительном направлении оси OY.

Таким образом, множество, просеянное при помощи элементарного решета C, совпадает с проекцией элементарного множества H и, следовательно, тождественно с E. Ч. т. д.

Предыдущие рассмотрения чрезвычайно важны, так как они показывают нам, что есть *три* строго эквивалентных метода для определения аналитических множеств:

1° *Писать параметрические уравнения* $x_i = f_i(t)$.

2° *Проектировать элементарные множества, измеримые B.*

3° *Просеивать при помощи счетных решет, измеримых B* [17].

Трансфинитный критерий измеримости B аналитических множеств. Выше мы доказали существование аналитического множества, неизмеримого B, следующим образом (см. стр. 149): мы *нашли линейное аналитическое множество e, дополнение к которому Ce заведомо не есть аналитическое множество.* Вот рассуждение, позволившее нам констатировать неизмеримость B множества e, обладающего этим свойством: если бы множество e было измеримо B, то и его дополнение Ce было бы таким. Значит, оно было бы аналитическим, тогда как это не так.

Мы теперь докажем весьма простым рассуждением, что рассмотренный случай не представляет ничего исключительного, так как *каково бы ни было аналитическое множество E, неизмеримое B, его дополнение CE не может быть аналитическим* [1]). Таким образом, неаналитичность дополнения к какому-либо аналитическому множеству E есть не только достаточное, но в то же время и необходимое условие для того, чтобы аналитическое множество E было неизмеримым B.

Чтобы убедиться в этом, допустим, что CE есть аналитическое множество. Так как E тоже аналитическое и не имеет общих точек с CE, то множества E и CE отделимы B. Ясно, что отделяющие множества, измеримые B, обязательно совпадают с E и CE. Ч. т. д.

Это простое рассуждение дает нам, таким образом, необходимый и достаточный критерий для неизмеримости B аналитического множества, и легко видеть, что это критерий чисто *отрицательного* характера: надо констатировать, что *дополнительное множество CE не есть* аналитическое. Но предыдущие рассмотрения, касающиеся счетных решет, измеримых B, показывают нам, что существует критерий другой

1) Эта теорема III заметки Суслина (Comptes Rendus Acad. Sc. 8 января 1917 г.). Теорема II о существовании аналитических множеств, неизмеримых B, была им доказана при помощи рассуждения, основанного на специальных свойствах кортежей индексов [18].

природы, тесно связанный с совокупностью трансфинитных чисел второго класса, критерий положительного характера, позволяющий констатировать неизмеримость B некоторого аналитического множества. Этот критерий возникает из *возможности рассматривать всякое аналитическое множество E*, как просеянное при помощи счетного решета, измеримого B.

В самом деле, с одной стороны, мы показали, что можно эффективно построить для каждого аналитического множества E элементарное решето C, которое, следовательно, счетно и измеримо B, причем E просеяно при помощи этого решета. С другой стороны, мы ввели важное различие между решетами. По самому определению, мы называем решето C *ограниченным*, если существует эффективно перечислимое *фиксированное* множество W, более протяженное, чем всякое вполне упорядоченное множество R_M, какова бы ни была точка M, не принадлежащая множеству E, просеянному при помощи C. В случае, если такого фиксированного множества W не существует, решето C называется *неограниченным*.

Чрезвычайная важность этого различия проистекает из выше доказанной теоремы (см. 191), формулируемой так: *для того чтобы аналитическое множество E было измеримо B, необходимо и достаточно, чтобы оно могло быть определено при помощи счетного решета C, измеримого B и ограниченного*. Ясно, что этот критерий имеет в некотором роде *положительный* характер.

Итак, все сводится к тому, чтобы решить следующую проблему:

Узнать, будет ли данное счетное решето C, измеримое B, ограниченным или нет.

К сожалению, эту проблему, повидимому, легко решить лишь в том случае, когда решето á priori задается ограниченным; следовательно, общего решения проблемы мы не имеем даже для элементарных решет.

Мы сильно сомневаемся в том, чтобы можно было дать общее решение этой проблемы, по крайней мере, если, согласно Лебегу, условиться считать, что определить решето C это значит назвать некоторое свойство P, характеризующее C; из него надо вывести ограниченность или неограниченность решета C. Мы сильно сомневаемся, чтобы можно было *во всех случаях* вывести из этого свойства P констатирование границы для решета C.

В этих условиях возникает вопрос, является ли сделанное различие достаточно серьезным, чтобы придавать ему смысл. Понятие *ограниченного решета*, очевидно, законно, так как речь идет о вполне упорядоченном множестве W, *эффективно перечислимом*: надо сравнивать переменное вполне упорядоченное множество R_M с этим фиксированным множеством W.

Напротив, понятие *неограниченного решета* чисто отрицательно, так как для того, чтобы эффективно констатировать, что некоторое элементарное решето C неограничено, очевидно, необходимо взять все счетные вполне упорядоченные множества и сравнить их с переменным вполне упорядоченным множеством R_M, а *это приводит к совокупности всех трансфинитных чисел второго класса*.

Таким образом, кажется более предпочтительным вернуться к первому критерию. Я хотел бы указать кратко и не входя в дискуссию по поводу природы этого критерия, что характер его *отрицательный*; так как второй критерий строго эквивалентен первому, мы вынуждены заключить, что *положительное определение*, *осуществленное при помощи трансфинитного, может быть эквивалентно отрицательному определению, не вводящему трансфинитное в явном виде.*

Итак, трансфинитное может быть глубоко спрятано под видом отрицательного определения или понятия.

Пример аналитического множества, неизмеримого *B*. Однако, несмотря на предыдущие критические замечания, есть один частный случай, когда мы можем немедленно констатировать, что рассматриваемое решето C *неограничено*, а следовательно, множество E, просеянное при помощи C, неизмеримо B.

Это случай счетного решета измеримого B и *универсального*, т. е. такого, что *всевозможные* линейные счетные множества получаются, если пересекать C прямыми D, параллельными оси OY. В самом деле, в силу исследований Г. Кантора, каково бы ни было вполне упорядоченное счетное множество W, составленное из любых элементов, можно эффективно построить линейное множество *точек* R, которое *подобно* W. Так как *всевозможные* линейные счетные множества получаются, если пересекать C прямыми D, параллельными оси OY, то a priori видно, что рассматриваемое решето C не может быть ограниченным [1]).

Итак, все сводится к построению счетного решета, измеримого B и универсального. Но это построение может быть сделано мгновенно.

В самом деле, возьмем неограниченную последовательность функций

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x),\ \ldots,\ y_n = \varphi_n(x),$$

непрерывных на интервале $(0 < x < 1)$ и обладающих следующим свойством: какова бы ни была последовательность действительных чисел $y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_n^0,\ \ldots$, существует действительное число x_0 между 0 и 1, для которого $y_n^0 = \varphi_n(x_0)$, каково бы ни было n.

Установив это, обозначим через C_n непрерывную между 0 и 1 кривую, начерченную в плоскости XOY и определенную уравнением $y = \varphi_n(x)$; соединение C кривых $C_1,\ C_2,\ \ldots$ $\ldots, C_n,\ \ldots$ есть, очевидно, плоское множество, измеримое B, и легко видеть, что C есть *универсальное* счетное решето. Ч. т. д.

Свойства конституант. Свойства конституант E_α самого аналитического множества E неизвестны: мы знаем только, что все E_α измеримы B, когда порождающее решето C счетно и измеримо B. Мы имеем больше сведений о свойствах конституант $\mathcal{E}_\alpha$ дополнительного множества $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\omega + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots | \Omega.$$

Прежде всего мы укажем одно интересное свойство конституант $\mathcal{E}_\alpha$: *каково бы ни было аналитическое множество* E', *содержащееся в* $\mathcal{E}$, *оно всегда принадлежит счетному множеству конституант* $\mathcal{E}_\alpha$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что порождающее решето C *ограничено на* E'. Это значит, что существует фиксированное трансфинитное число β второго класса,

---

[1]) Очень важно было бы знать, является ли этот случай единственным, если, разумеется, не считать очевидных видоизменений, когда из определения C удается вывести, что C есть неограниченное решето. Мы думаем, что эта проблема неразрешима.

которое превосходит все трансфинитные числа α_M, соответствующие точкам M из E' (см. стр. 184). Отсюда следует, что каждая точка M из E' принадлежит к некоторой конституанте $\mathcal{E}_\alpha$, у которой индекс α меньше, чем β. Следовательно, множество E' содержится в сумме *счетного* множества конституант $\mathcal{E}_\alpha$. Ч. т. д.

Мы дополним этот результат следующим замечанием: доказанное свойство конституант $\mathcal{E}_\alpha$ дает нам немедленно новое доказательство важной теоремы о том, что всякие два аналитические множества E и E' без общих точек отделимы B.

В самом деле, возьмем все конституанты $\mathcal{E}_\alpha$ множества CE, содержащие точки E'. Этих конституант счетное множество и они измеримы B. Значит, их сумма H' есть множество, измеримое B, содержащее E' и без общей точки с E. Если мы обозначим через H дополнение к H', то множество H измеримо B и содержит E. Следовательно, E и E' отделимы при помощи двух множеств H и H', измеримых B. Ч. т. д.

Мы думаем, что на это замечание не нужно смотреть лишь как на курьез, так как, по нашему мнению, здесь содержится нечто большее. В самом деле, мы знаем, что в классификации Валле-Пуссена два любых *элемента* E и E' класса α всегда отделимы при помощи двух множеств H и H' низших классов. С другой стороны, дополнение CE каждого элемента E класса α может быть разложено на счетное множество множеств класса ниже α. Для аналитических множеств неизмеримых B мы имеем два совершенно аналогичных предложения: два аналитических множества E и E' без общей точки всегда отделимы при помощи двух множеств H и H', измеримых B. С другой стороны, дополнение CE к некоторому аналитическому множеству E, неизмеримому B, всегда разлагается в трансфинитную сумму множеств, измеримых B.

Так как в научных исследованиях аналогия часто служит весьма ценным и даже необходимым инструментом для дальнейшего продвижения этих исследований, то мы, естественно, приходим к тому, чтобы *рассматривать аналитические множества, неизмеримые B, как элементы класса Ω продолженной классификации Бэра — Валле-Пуссена.* Эта бьющая в глаза аналогия между аналитическими множествами, неизмеримыми B, и элементами гипотетического класса Ω

может оказать ценные услуги, направляя нас на открытие новых феноменов, которые затем останется доказать.

Мы увидим, например, что существуют два аналитических дополнения $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ без общей точки и неотделимых B (стр. 221, 262 и 265). Это предложение можно вывести по принципу двойственности из теоремы.

В каждом классе K_α классификции Бэра — Валле-Пуссена существуют два множества $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$, достижимые снизу, без общих точек и неотделимые при помощи множеств класса ниже α.

Доказательство этой теоремы не представляет никаких затруднений [1]).

Вернемся теперь к установленному свойству конституант $\mathcal{E}_\alpha$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\omega + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots | \Omega.$$

Мы знаем, что все эти конституанты измеримы B. Следовательно, каков бы ни был индекс α, множество $\mathcal{E}_\alpha$ или *счетно* (конечно), или *содержит совершенное множество* P [2]). И в этом последнем случае множество $\mathcal{E}$, очевидно, имеет мощность континуума [3]).

С другой стороны, если $\mathcal{E}$ содержит совершенное множество P_1, то по крайней мере одна из его конституант должна быть несчетной и, следовательно, должна содержать совершенное ядро. В самом деле, если $\mathcal{E}$ содержит совершенное множество P_1, то это множество, будучи измеримо B, должно содержаться в сумме *счетного множества* конституант $\mathcal{E}_\alpha$ в силу указанного свойства. Следовательно, хоть одна из этих конституант должна быть несчетной.

Итак, *для того чтобы аналитическое дополнение $\mathcal{E}$ содержало совершенное множество, необходимо и достаточно, чтобы хоть одна из его конституант $\mathcal{E}_\alpha$ была несчетной* [4]).

---

[1]) См. мою работу «Analogies entre les ensembles mesurables B et les ensembles analytiques» (Fund. Math. т. XVI, 1930).

[2]) Теорема Александрова «Sur la puissance des ensembles mesurables B» (C. R. Acad. Sc. 1916, стр. 323).

[3]) Теорема Кантора — Бернштейна.

[4]) Точно так же легко видеть, что если аналитическое дополнение имеет положительную меру, или есть множество второй категории на некотором совершенном множестве P, то по крайней мере одна из его конституант имеет положительную меру или есть мно-

Следовательно, если аналитическое дополнение $\mathcal{E}$ неизмеримо B и не содержит совершенного множества, то это аналитическое дополнение $\mathcal{E}$ есть *соединение счетных (конечных) множеств, перенумерованных при помощи трансфинитных чисел второго класса по Кантору.*

С другой стороны, всякое аналитическое множество E, очевидно, *определено счетным множеством условий.*

Именно по этой причине математики, которые допускают рассуждения с трансфинитами и допускают *одновременное* разбиение аналитического дополнения, неизмеримого B, на трансфинитную бесконечность конституант, перенумерованных при помощи *всех* трансфинитных чисел второго класса по Кантору, — эти математики стремятся определить такое исключительное аналитическое дополнение. В самом деле, если такое аналитическое дополнение, логически возможное, к тому же практически реально, то можно будет утверждать, что существование *всех* трансфинитных чисел второго класса есть как бы экспериментальный факт.

Узкая проблема континуума и узкая проблема Лебега. Чтобы объяснить наилучшим образом, в чем заключаются эти проблемы, мы сначала возьмем какое-нибудь аналитическое множество E, неизмеримое B. Пусть C — счетное решето, измеримое B, при помощи которого просеяно множество E.

В этих условиях мы имеем разложения

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + \ldots + E_\omega + \ldots + E_\alpha + \ldots \,|\, \Omega$$

и

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\omega + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots \,|\, \Omega$$

множества E и его дополнения $\mathcal{E}$ на бесконечное множество конституант E_α и $\mathcal{E}_\alpha$, каждая из которых *измерима* B.

Так как данное аналитическое множество E предположено неизмеримым B, то второе разложение заведомо имеет *трансфинитную* бесконечность *непустых* членов. Следовательно,

---

жество второй категории на P. Кроме того, если мы умеем выбрать одну и только одну точку во *всякой* конституанте $\mathcal{E}_\alpha$ множества P, *то множество выбранных точек есть множество первой категории на каждом совершенном множестве* P. См. заметку Лузина и Серпинского «Sur un ensemble non dénombrable, qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait» (Rendiconti dei Lincei, Roma, февраль 1928 г.).

если мы обозначим через θ_α сумму $E_\alpha + \mathcal{E}_\alpha$ и если мы сложим почленно предыдущие разложения, мы получим формулу

$$\mathcal{J} = \theta_0 + \theta_1 + \ldots + \theta_\omega + \ldots + \theta_\alpha + \ldots | \Omega,$$

которая дает нам *полное разложение всей области* $\mathcal{J}$ *на трансфинитную бесконечность множеств* θ_α, *измеримых* B, *непустых и перенумерованных при помощи всех трансфинитных чисел второго класса по Кантору* [1]).

Известно, что знаменитая проблема континуума состоит в том, чтобы узнать, можно ли перенумеровать все точки некоторого сегмента при помощи всех трансфинитных чисел второго класса по Кантору. Ясно, что эту проблему можно рассматривать как некоторого рода полное разложение области $\mathcal{J}$ на трансфинитную бесконечность множеств θ_α, измеримых B, перенумерованных при помощи всех трансфинитных чисел второго класса по Кантору, *каждое из которых сводится к одной и только одной точке.*

Но взятая отдельно точка есть множество, измеримое B, класса 1. Следовательно, на основании предыдущего, было бы очень желательно получить некоторые общие результаты, касающиеся разложения континуума на трансфинитную бесконечность множеств θ_α, измеримых *B ограниченных классов.* Это в некотором роде ослабленная проблема континуума, мы ее назовем *узкой проблемой континуума.*

С другой стороны, Лебег поставил проблему: *узнать, можно ли назвать множество различных точек, перенумерованных при помощи всех трансфинитных чисел второго класса по Кантору* [2]). Лишь после того, как будет

---

[1]) Возможность подобного разложения всей области $\mathcal{J}$ впервые была констатирована Серпинским и мною. См. нашу заметку в Comptes Rendus Acad. Sc., т. 175, p. 357, «Sur une décomposition du continu».

[2]) Цитируем текстуально соответствующее место у Лебега в его письме к Борелю (Cinq lettres sur la théorie des ensembles, Bull. de la Soc. mathém. de France, декабрь 1904 г.).

«... Когда я слышу, как говорят о законе, определяющем трансфинитную бесконечность выборов, я всегда отношусь с недоверием, так как я еще никогда не видел подобных законов, тогда как я знаю законы, определяющие счетное множество выборов. Но это лишь вопрос рутины и, после некоторого размышления, я часто вижу трудности, на мой взгляд, столь же серьезные в рассужденайдено *положительное* решение этой проблемы, можно считать установленным, что мощность континуума *сравнима* с мощностью множества всех трансфинитных чисел второго класса по Кантору. Поэтому было бы вполне естественно стараться назвать трансфинитную бесконечность множеств $\mathcal{E}_\alpha$ не пустых, измеримых B и *ограниченных* классов. Это тоже ослабленная проблема; мы ее назовем *узкой проблемой Лебега.*

Таким образом, мы естественно приходим к тому, чтобы поставить следующий важный вопрос: ***Каковы классы конституант $\mathcal{E}_\alpha$ аналитического дополнения $\mathcal{E}$? И можно ли назвать такое неизмеримое B аналитическое дополнение, у которого конституанты $\mathcal{E}_\alpha$ будут ограниченных классов?***

Мы здесь ограничимся просто доказательством *существования аналитических дополнений $\mathcal{E}$, у которых классы конституант $\mathcal{E}_\alpha$* неограничены [1]).

Чтобы убедиться в этом, возьмем в плоскости XOY *универсальное* аналитическое множество U: это значит, что всевозможные линейные аналитические множества можно получить, пересекая U прямыми $x = x_0$, параллельными оси OY. Мы теперь утверждаем, что *дополнение CU обладает указанным свойством.*

В самом деле, допустим, что в разложении

$$CU = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\omega + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots |\Omega$$

конституанты $\mathcal{E}_\alpha$ имеют ограниченные классы, т. е. их классы

ниях, где входит лишь счетное множество выборов, как и в тех, где их трансфинитное число. Например, если я не считаю установленным классическим рассуждением, что каждое множество мощности выше счетной содержит множество той же мощности, как и множество всех трансфинитных чисел класса II по Кантору, то я также мало значения придаю методу, при помощи которого доказывают, что не конечное множество содержит счетное множество. Хотя я сильно сомневаюсь, чтобы когда-нибудь было названо множество, которое не будет ни конечным, ни бесконечным, однако невозможность такого множества не кажется мне доказанной...».

1) Серпинский и я констатировали существование таких аналитических дополиенни в нашей заметке в Comptes Rendus 12 ноября 1929 г. «Sur les classes des constituantes d'un complémentaire analytique».

меньше некоторого фиксированного трансфинитного числа $\beta < \Omega$. Отсюда мы заключаем, что сумма

$$S_\alpha = \mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_1 + \ldots + \mathscr{E}_\omega + \ldots | \alpha$$

счетного множества конституант есть множество, измеримое B и класса $\leqslant \beta + 1$. Следовательно, каково бы ни было трансфинитное число α, параллели $x = x_0$ к оси OY пересекают S_α по множеству, измеримому B, класса $\leqslant \beta + 1$.

Но, с другой стороны, так как множество U есть универсальное, то существуют параллели к оси OY, пусть $x = x_0$, которые пересекают U по множеству H, измеримому B и заранее заданному. А так как H должно принадлежать к счетному множеству конституант $\mathscr{E}_\alpha$, то существует трансфинитное число α, достаточно большое и такое, что H есть пересечение S_α с прямой $x = x_0$. Следовательно, H всегда класса $\leqslant \beta + 1$, что невозможно, так как H есть *произвольное* множество, измеримое B.

Второй принцип аналитических множеств. Отделимость (CA)

Отделимость при помощи аналитических дополнений. Мы теперь обобщим *понятие отделимости* B двух множеств и введем понятие отделимости при помощи множеств из других семейств.

Точнее, мы введем *понятие отделимости при помощи двух аналитических дополнений* без общих точек.

Пусть E_1 и E_2 — два любых множества точек, лежащих в области $\mathscr{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$. Мы предполагаем, что E_1 и E_2 не имеют общих точек.

Определение. *Мы скажем, что два множества E_1 и E_2 отделимы при помощи двух аналитических дополнений, если существуют два множества H_1 и H_2 без общих точек, содержащие соответственно E_1 и E_2, каждое из которых есть аналитическое дополнение.*

Это важное понятие будет играть существенную роль в дальнейших рассмотрениях.

Сделаем теперь одно замечание: было бы бесполезно вводить понятие *одновременной* отделимости при помощи двух аналитических множеств. В самом деле, если бы множества H_1

и H_2, содержащие соответственно E_1 и E_2, были аналитическими множествами, то H_1 и H_2 были бы отделимы B, и мы бы не получили ничего нового. Напротив, понятие одновременной отделимости при помощи аналитических дополнений имеет чрезвычайно важное значение, так как мы увидим, что *существуют два аналитических дополнения, неотделимые B.*

Кроме того, можно рассматривать отделимость в некотором роде *одностороннюю*, осуществляемую при помощи аналитических множеств или аналитических дополнений. Вот в чем состоит первая из них.

Пусть E_1 и E_2 — два любых множества без общей точки. *Мы скажем, что E_1 и E_2 отделимы друг от друга при помощи аналитических множеств, если существуют два аналитических множества H_1 и H_2, содержащие соответственно E_1 и E_2 и такие, что H_1 не содержит ни одной точки из E_2, а H_2 ни одной точки из E_1.*

Мы получим совершенно аналогичное определение, относящееся к отделимости множеств E_1 и E_2 друг от друга при помощи аналитических дополнений, если просто заменим в предыдущем определении слова *аналитическое множество* через *аналитическое дополнение.*

Однако, мы сейчас же увидим, что введение этих двух понятий иллюзорно, так как каждый из этих двух видов отделимости полностью совпадает с *одновременной* отделимостью при помощи двух аналитических дополнений, определение которой было дано в начале этой страницы.

Формулировка второго принципа теории аналитических множеств. Теперь пора ввести один общий принцип, от которого зависит решение многочисленных вопросов теории аналитических множеств и их дополнений; в частности, этот принцип позволяет полностью решить вопросы об односторонней отделимости при помощи двух аналитических множеств или аналитических дополнений; с другой стороны, именно этот принцип позволяет установить природу проекции множества единственности (стр. 257).

Принцип I'. *Если удалить из двух аналитических множеств их общую часть, то оставшиеся части всегда одновременно отделимы при помощи двух аналитических дополнений.*

Прежде чем приступить к доказательству этого принципа, мы покажем, что он позволяет свести понятия односторонней отделимости, определенные выше, к понятию *одновременной* отделимости при помощи аналитических дополнений.

В самом деле, пусть E_1 и E_2 — два любых множества, образованные из точек и отделимые *друг от друга* при помощи двух аналитических множеств H_1 и H_2. Это значит, что H_1 содержит E_1 и не имеет общей точки с E_2, и обратно, H_2 содержит E_2 и не имеет общей точки с E_1.

Пусть H есть общая часть H_1 и H_2. На основании второго принципа остающиеся множества $H_1 - H$ и $H_2 - H$ *одновременно* отделимы при помощи двух аналитических дополнений θ_1 и θ_2 без общих точек. А так как θ_1 содержит E_1 и θ_2 содержит E_2, то множества E_1 и E_2 одновременно отделимы при помощи двух аналитических дополнений. Ч. т. д.

Обратно, мы немедленно замечаем, что если два множества E_1 и E_2 одновременно отделимы при помощи двух аналитических дополнений θ_1 и θ_2, то они отделимы *друг от друга* при помощи двух аналитических множеств. Достаточно обозначить через H_1 дополнение к θ_2 и через H_2 — дополнение к θ_1; множества H_1 и H_2 — аналитические и осуществляют одностороннюю отделимость.

Точно так же легко видеть, что если E_1 и E_2 отделимы *друг от друга* при помощи двух аналитических дополнений θ_1 и θ_2, то они *одновременно* отделимы при помощи двух аналитических дополнений. Достаточно заметить, что, обозначая через H_1 и H_2 дополнения ко множествам θ_1 и θ_2, мы получим два *аналитических* множества, осуществляющие одностороннюю отделимость данных множеств E_1 и E_2. Итак, эти последние рассмотрения приводятся к предыдущему случаю. Ч. т. д.

Заметим, что второй принцип справедлив для аналитических множеств, расположенных в области *любого числа измерений*. Но достаточно доказать его для двух *линейных* аналитических множеств, расположенных на порции (0,1), так как мы видели, что можно совершить взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование области любого числа измерений в порцию (0,1) линейной области, причем это преобразование сохраняет аналитические множества и их дополнения.

Универсальное множество подобия. Рассмотрим на плоскости YOZ квадрат, стороны которого определяются уравнениями

$$y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1.$$

Мы ставим себе целью построить внутри этого квадрата последовательности кривых $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ непрерывных на порции (0,1) области $\mathcal{J}_y$ и обладающих следующими свойствами:

1° Если $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ есть вполне определенная последовательность, образованная из всех рациональных точек оси OZ, заключенных между 0 и 1, то кривая L_i целиком лежит *под* кривой L_j, $i \neq j$, если $\rho_i < \rho_j$ и L_i лежит полностью *над* L_j, если $\rho_i > \rho_j$; здесь индексы i и j — любые целые положительные числа.

2° Каково бы ни было множество e, составленное из рациональных точек, расположенных между 0 и 1, и *подобное множеству всех рациональных точек между* 0 *и* 1, существует иррациональное число y_0 такое, что прямая $y=y_0$ пересекает последовательность кривых $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ в точности по e.

Мы назовем *универсальным множеством подобия* соединение кривых $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, обладающих указанными свойствами.

Перейдем теперь к построению последовательности кривых $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ Пусть $z=f_n(y)$ есть уравнение, определяющее кривую L_n.

Мы определяем первую функцию $f_1(y)$ следующим образом: пусть $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots$ есть последовательность, образованная из всех интервалов Бэра порядка 1; мы положим $f_1(y)=\rho_k$ на δ_k; здесь $k=1, 2, 3, \ldots$

Допустим, что мы уже определили функции $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_{n-1}$ и что функция f_i постоянна на каждом интервале Бэра порядка i; кроме того, мы предполагаем, что взаимное положение уже определенных кривых $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ такое же, как и соответствующих рациональных точек $\rho_1, \rho_2, \ldots$ $\ldots, \rho_{n-1}$ на оси OZ.

Чтобы определить функцию f_n, мы разделим каждый интервал Бэра Δ порядка $n-1$ на интервалы Бэра порядка n; пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k, \ldots$ эти интервалы. Очевидно, что функции $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ постоянны на Δ; пусть $r_1, r_2, \ldots \ldots, r_{n-1}$ — эти постоянные. Согласно сделанной гипотезе, множество $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ подобно множеству точек $\rho_1, \rho_2, \ldots \ldots, \rho_{n-1}$. Пусть $r'_1, r'_2, \ldots, r'_k, \ldots$ — все рациональные числа, каждое из которых занимает по отношению к числам $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, то же положение, как и ρ_n по отношению к точкам $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$. *Мы положим* $f_n(y) = r'_k$ *на* Δ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Мы видим, что функция $f_n(y)$ полностью определена и что соответствующая кривая L_n имеет по отношению к уже определенным кривым $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}, \ldots$, то же положение, как точка ρ_n по отношению к точкам $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$.

Следовательно, последовательность так определенных кривых $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, очевидно, обладает свойством 1°. Чтобы доказать, что она обладает свойством 2°, возьмем множество e, образованное из рациональных точек и подобное множеству рациональных точек, заключенных между 0 и 1. Пусть ζ_n есть точка из e, соответствующая точке ρ_n, причем это соответствие есть соответствие *подобия*. Найдем интервал Бэра δ_1 порядка 1, в котором $f_1(y) = \zeta_1$; затем найдем в δ_1 интервал Бэра δ_2 порядка 2, где $f_2(y) = \zeta_2$ и так далее.

Ясно, что иррациональная точка y_0, которая принадлежит всем этим $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots$, такова, что прямая $y = y_0$ пересекает кривые $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ в точности по e.

Итак, мы построили искомую последовательность кривых $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ Ч. т. д.

Пространственное универсальное множество подобия* [19]. Рассмотрим в области $\mathcal{J}_{\xi, y, z}$ куб, стороны которого определяются уравнениями:

$$\xi = 0, \quad \xi = 1, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad z = 1.$$

Мы построим внутри этого куба последовательность поверхностей $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$, каждая из которых определена и непрерывна на некотором множестве, состоящем из конечного числа полос, лежащих в квадрате $(0 < \xi < 1;\ 0 < y < 1)$ области $\mathcal{J}_{\xi y}$ и параллельных оси OY. Последовательность $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ обладает следующими свойствами:

1° Пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ — вполне определенная последовательность, состоящая из всех рациональных точек оси OZ, лежащих в интервале (0,1). Пусть E_{ij} $i \neq j$ — множество всех точек области $\mathcal{J}_{\xi y}$, в которых определены обе поверхности Q_i и Q_j (различные поверхности определены на различных множествах области $\mathcal{J}_{\xi y}$). Тогда, если $\rho_i < \rho_j$, то часть Q_i, проектирующаяся в E_{ij}, лежит *под* частью Q_j, проектирующейся в E_{ij}, а если $\rho_i > \rho_j$, то часть Q_i, проектирующаяся в E_{ij}, лежит *над* соответствующей частью Q_j.

2° Какова бы ни была подпоследовательность $\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \ldots$ $\ldots, \rho_{i_n}, \ldots$ (конечная или бесконечная) нашей последовательности рациональных чисел, найдется такое ξ_0, что плоскость $\xi = \xi_0$ пересекается со всеми поверхностями $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots, Q_{i_n}, \ldots$

3° Поверхности $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots, Q_{i_n}, \ldots$ пересекаются с плоскостью $\xi = \xi_0$ по системе кривых $L_{i_1}^{\xi_0}, L_{i_2}^{\xi_0}, \ldots, L_{i_n}^{\xi_0}, \ldots$, образующих множество подобия для последовательности $\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \ldots, \rho_{i_n}, \ldots$ Это значит, что кривые $L_{i_1}^{\xi_0}, L_{i_2}^{\xi_0}, \ldots, L_{i_n}^{\xi_0}, \ldots$ (определенные для всех значений y плоскости $\xi = \xi_0$) расположены подобно соответствующим точкам $\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \ldots, \rho_{i_n}, \ldots$ и каково бы ни было множество рациональных точек $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, подобное множеству $\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \ldots, \rho_{i_n}, \ldots$, — найдется такое y_0, что прямая $P_{\xi_0 y_0}$, проходящая через точку (ξ_0, y_0) области $\mathcal{J}_{\xi y}$ и параллельная оси OZ, пересекает каждую кривую $L_{i_n}^{\xi_0}$ в точке $z = r_n$.

Перейдем к построению поверхностей $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ Разделим сторону $y = 0$ квадрата $(0 < \xi < 1,\ 0 < y < 1)$, лежащего в области $\mathcal{J}_{\xi y}$, на счетное множество интервалов Бэра первого порядка $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ и рассмотрим полосу l_1 нашего квадрата, две стороны которой параллельны оси OY и которая опирается на интервал δ_2 оси $O\xi$. Поверхность Q_1 мы определим с помощью функции $f_1(\xi, y)$, заданной в точках полосы l_1. Для определения $f_1(\xi, y)$ мы разделим полосу l_1 на счетное множество параллелепипедов Бэра $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n_1}, \ldots$ первого порядка так, чтобы параллелепипед π_{n_1} проектировался на ось OY в интервал Бэра первого порядка Δ_{n_1}. Во всех точках (ξ, y) параллелепипеда π_{n_1} мы положим:

$$f_1(\xi, y)=\rho_{n_1}; \quad (\xi, y)\in\pi_{n_1}.$$

Очевидно, что $f_1(\xi, y)$ — непрерывная функция, определенная во всех точках полосы l_1.

Пусть теперь построены поверхности $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$, причем так, что для них удовлетворяется условие 1°. Каждая поверхность Q_i, $i\leqslant n-1$ определена с помощью непрерывной функции $f_i(\xi, y)$, заданной на конечном числе полос, параллельных оси OY и опирающихся на интервалы Бэра порядка $\leqslant i$ области $\mathcal{J}_\xi$. При этом в полосе, опирающейся на интервал Бэра δ порядка k, функция постоянна на параллелепипедах Бэра порядка k, проектирующихся на δ.

Для построения функции $f_n(\xi, y)$ нужно прежде всего указать те полосы, на которых эта функция будет определена. Для этого достаточно указать те интервалы Бэра области $\mathcal{J}_\xi$, на которые эти полосы опираются.

В числе этих интервалов находится интервал δ_{n+1} первого порядка. Для указания остальных интервалов поступим следующим образом. Пусть на интервал Бэра $\delta_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ порядка $k<n$ опирается полоса $l_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, где $j_1=i_1+1$, $j_r=i_r-i_{r-1}+1$, во всех точках которой определены функции

$$f_{i}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_k}$$

и только они. Тогда выберем в $\delta_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ интервал Бэра порядка $k+1$ с номером $n-i_k+1$: $\delta_{j_1 \ldots j_k (n-i_k+1)}$. (Если $i_k=n-1$, то это — второй интервал Бэра порядка $k+1$, подчиненный $\delta_{j_1 \ldots j_k}$. Если $i_k<n-1$, то это первый, кроме $\delta_{j_1 \ldots j_k 1}$, из интервалов Бэра порядка $k+1$, подчиненных $\delta_{j_1 \ldots j_k}$, такой, что в опирающейся на него полосе не определены функции с номерами $>i_k$, в полосе, опирающейся на интервалы $\delta_{j_1 \ldots j_k 1}$, функции с номерами $>i_k$ не определяются.) Совокупность всех выбранных таким образом интервалов Бэра вместе с интервалом δ_{n+1} и составляет множество всех интервалов Бэра, на которые опираются полосы, в которых определяется функция $f_n(\xi, y)$.

Чтобы определить функцию f_n в полосе $l_{i_1 \dots i_k}$, опирающейся на $\delta_{j_1 \dots j_k (n-i_k+1)}$, заметим, что все функции f_{i_r}, $r \leqslant k$ постоянны на каждом прямоугольнике Бэра ранга k, содержащемся в полосе $l_{i_1 \dots i_k}$ и проектирующемся на ось OY в интервал Бэра ранга k. Пусть $r_{i_1}, r_{i_2}, \dots, r_{i_k}$ — соответственные значения этих функций на некотором прямоугольнике π порядка k. Это множество, по условию, подобно множеству $\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \dots, \rho_{i_k}$. Разделив интервал Бэра порядка k области $\mathcal{G}_y$, в которой проектируется π на интервалы Бэра порядка $k+1$, мы разобъем пересечение $\pi l_{i_1 \dots i_k n}$ прямоугольника π с полосой $l_{i_1 \dots i_k n}$ на счетное множество прямоугольников Бэра порядка $k+1$ $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p, \dots$ Пусть $r'_1, r'_2, \dots, r'_p, \dots$ — множество всех рациональных чисел, расположенных относительно чисел $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ так же, как точка ρ_n расположена относительно точек $\rho_1, \rho_2, \dots$ $\dots, \rho_{n-1}$.

Положим $f_n(\xi, y) = r'_p$ на π_p. Тем самым функция $f_n(\xi, y)$ определена. Легко видеть, что в полосе $l_{i_1 \dots i_k n}$, опирающейся на интервал Бэра $\delta_{i_1 \dots i_k (n-i_k)}$ ранга $k+1$ определено в точности $k+1$ функций

$$f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_k}, f_n.$$

Соответствующая поверхность Q_n имеет на полосе $l_{i_1 \dots i_k n}$ то же расположение относительно поверхностей $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots$ $\dots, Q_{i_k}$ как точка ρ_n относительно точек $\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \dots, \rho_{i_k}$.

Заметим, что каждая плоскость $\xi = \xi_0$, пересекающая полосу $l_{i_1 i_2 \dots i_k n}$, пересекает поверхность Q_n по одной и той же кривой, которую мы обозначим $L_n^{i_1 \dots n}$. Плоскости $\xi = \xi_0$, пересекающие различные полосы, на которых определена функция f_n, пересекают поверхность Q_n, вообще говоря, по различным кривым.

Покажем, что построенная система поверхностей удовлетворяет условиям 1°, 2°, 3°. Условие 1° удовлетворяется по построению. Чтобы доказать, что выполняется условие 2°, выберем произвольную подпоследовательность $\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \dots$ $\dots, \rho_{i_n}, \dots$ (конечную или бесконечную) последовательности

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ На интервал Бэра δ_{i_1+1} области $\mathcal{J}_\xi$ опирается полоса l_{i_1}, на которой определена функция f_{i_1} и не определена никакая функция f_j, $j < i_1$.

На интервал Бэра $\delta_{j_1 j_2}$ порядка 2 опирается полоса $l_{i_1 i_2}$, на которой определены функции f_{i_1} и f_{i_2} и не определена никакая функция f_j, $j \neq i_1$ и $j < i_2$ и так далее.

Точка ξ_0, принадлежащая всем интервалам Бэра $\delta_{j_1}, \delta_{j_1 j_2}, \ldots$ $\ldots, \delta_{j_1 \ldots j_r}, \ldots$ такова, что плоскость $\xi = \xi_0$ пересекает поверхности $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots, Q_{i_n}, \ldots$ и только их. Заметим, что если последовательность $\rho_{i_1}, \ldots, \rho_{i_n}$ конечна, то ξ_0 есть любая точка интервала Бэра $\delta_{j_1 j_2 \ldots j_n 1}$.

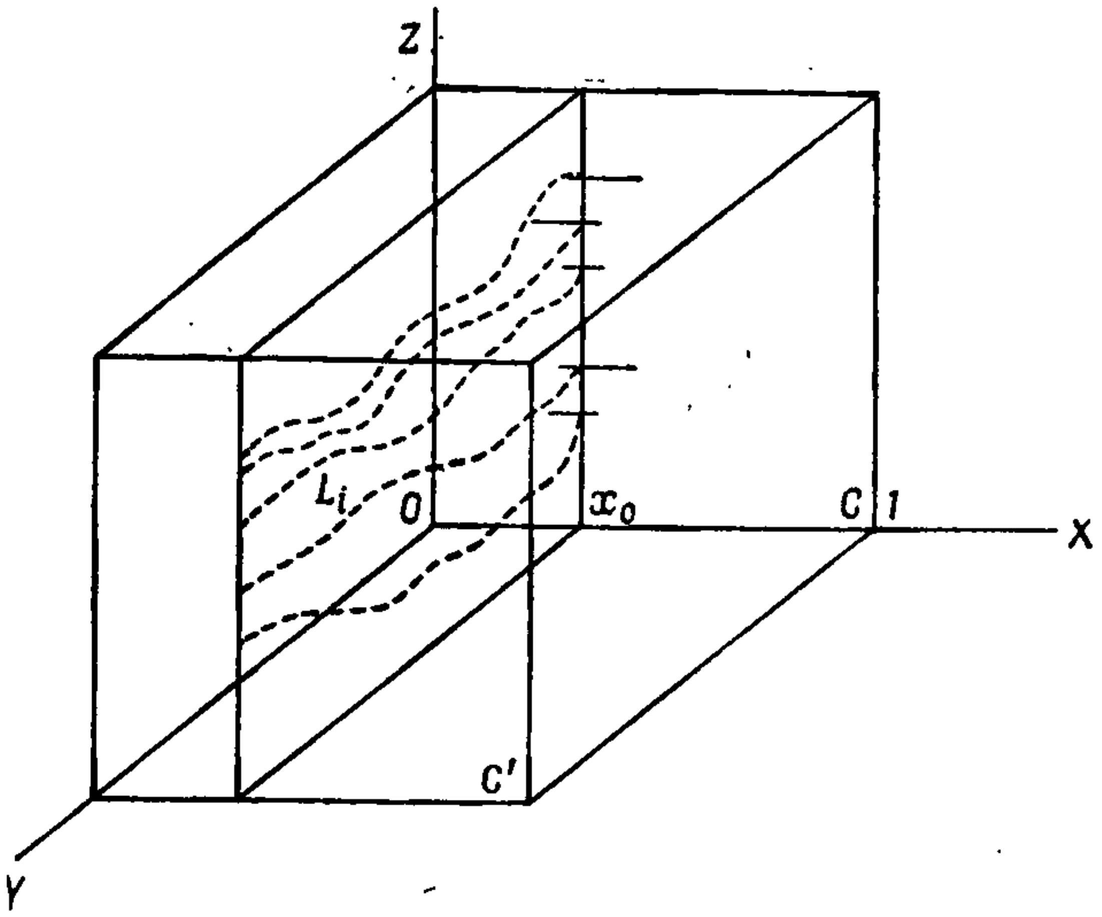
Покажем, что выполняется условие 3°. Очевидно, что плоскость $\xi = \xi_0$ пересекает поверхности $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots, Q_{i_n}, \ldots$ соответственно по кривым $L_{i_1}^{x_0}, L_{i_2}^{x_0}, \ldots, L_{i_n}^{x_0}, \ldots$, расположенным одна относительно другой так же, как соответственные рациональные точки $\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \ldots, \rho_{i_n}, \ldots$ Пусть e — произвольное множество рациональных точек $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, подобное множеству $\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \ldots, \rho_{i_n}, \ldots$ В полосе l_{i_1}, опирающейся на интервал Бэра δ_{i_1+1}, найдется прямоугольник Бэра первого порядка π_{p_1}, в точках которого $f_{i_1} = r_1$. В полосе $l_{i_1} l_{i_2}$ найдется прямоугольник Бэра второго порядка $\pi_{p_1 p_2}$, содержащийся в π_{p_1}, в точках которого $f_{\,2} = r_2$ и т. д.

Точка M, принадлежащая всем прямоугольникам π_{p_1}, $\pi_{p_1 p_2}, \ldots$ лежит в плоскости $\xi = \xi_0$, так как принадлежит всем полосам $l_{i_1}, l_{i_1 i_2}, \ldots$ Прямая P_M, проходящая через точку M параллельно оси OZ, пересекает кривые $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots$ $\ldots, L_{i_n}, \ldots$ в точности по множеству e.

Сравнение решет. Чтобы доказать второй принцип теории аналитических множеств, мы должны научиться сравнивать решета.

Возьмем в пространстве $OXYZ$ куб с ребрами, равными единице, расположенными на осях координат. Пусть C есть решето, лежащее на грани $y = 0$ этого куба, и C' — другое решето, лежащее на грани $y = 1$ того же куба. Мы предполагаем, что каждое из этих решет образовано из прямолинейных сегментов, параллельных оси OX с рациональными координатами z.

Установив это, проведем через точку x_0, лежащую на оси OX, плоскость $x = x_0$. Эта плоскость пересекает решета



Черт. 5.

C и C' по двум счетным множествам, которые мы обозначим через R_{x_0} и R'_{x_0}.

Возможны только два случая:

Первый случай. Множество R_{x_0} подобно части R'_{x_0}, причем эта часть может совпасть с самим R'_{x_0}.

Второй случай. Множество R_{x_0} не подобно никакой части R'_{x_0}, включая и само это множество.

Мы докажем, что множество точек x_0, для которых имеет место первый случай, есть аналитическое множество.

* Пусть x_0 — любая точка интервала $(0,1)$ оси OX. Точки множества R_{x_0} имеют рациональные координаты z. Следовательно, множество R_{x_0} есть подпоследовательность последовательности $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$, рассмотренной в предыду-

щем параграфе. Тогда ему соответствует последовательность кривых $L_{i_1}^{\xi_0}, L_{i_2}^{\xi_0}, \ldots, L_{i_n}^{\xi_0}, \ldots$, расположенных подобно точкам множества R_{x_0}. Проведем в квадрате, который получается от пересечения куба плоскостью $x = x_0$, все эти кривые. Заставляя изменяться точку x_0, мы получим внутри куба множество точек Λ, образованное из всех проведенных кривых. Изучим природу этого множества Λ.

С этой целью напомним, что решето C состоит из счетного множества прямолинейных отрезков, параллельных оси OX. Обозначим через σ_n проекцию на ось OX суммы всех тех отрезков, у которых координата z равна ρ_n. Множество σ_n может быть представлено в следующем виде:

$$\sigma_n = \sigma_n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n} \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \ldots \sigma_{i_k} \prod_{n > j \neq i_1, \ldots, i_k} C\sigma_j.$$

Каждое множество $H_{i_1 \ldots i_k}^n = \sigma_n \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_k} \prod C\sigma_j$, очевидно, измеримо B. Для каждой точки x_0 множества $H_{i_1 \ldots i_k}^n$ соответствующее множество R_{x_0} содержит точки с координатами $z = \rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \ldots, \rho_{i_k}, \ldots$ и не содержит точек с координатами $z = \rho_j$, $j < n$ и $j \neq i_1, i_2, \ldots, i_k$. Следовательно, кривая $L_n^{\xi_0}$, проведенная в плоскости $x = x_0$, совпадает с кривой $L_n^{i_1 i_2 \ldots i_k n}$. Значит, всем точкам множества $H_{i_1 \ldots i_k}^n$ соответствует одна и та же кривая $L_n^{i_1 \ldots i_k n}$. Так как $H_{i_1 \ldots i_k}^n$ и $L_n^{i_1 \ldots i_k n}$ — множества, измеримые B, то и сумма кривых $L_n^{i_1 \ldots i_k n}$, соответствующих всем точкам x_0 множества $H_{i_1 \ldots i_k}^n$, есть множество, измеримое B. Так как множество σ_n есть сумма конечного числа попарно не пересекающихся множеств $H_{i_1 \ldots i_k}^n$, то соединение всех кривых $L_n^{()}$, соответствующих всем точкам множества σ_n, есть множество, измеримое B, однозначное по отношению к плоскости XOY. Если мы проделаем это построение для всех множеств σ_n, соответствующих рациональным числам ρ_n, то получим, очевидно, рассматриваемое множество Λ. Следовательно, множество Λ состоит из счетного множества однозначных множеств, измеримых B^*.

Проведем теперь через каждую точку решета C' прямую, параллельную оси OY. Пусть S — множество точек куба, расположенных на этих прямых. Ясно, что S измеримо B. Следовательно, дополнение к S относительно куба также измеримо B; мы его обозначим через Σ. Общая часть Λ и Σ также измерима B.

Природа этой общей части $\Lambda\Sigma$ такова: множество Λ есть соединение счетного числа однозначных множеств, измеримых B. Но общая часть каждого из этих однозначных множеств и Σ есть, очевидно, также однозначное множество, измеримое B. Следовательно, множество $\Lambda\Sigma$ образовано из счетного числа однозначных множеств, измеримых B.

Отсюда мы заключаем, что проекция множества $\Lambda\Sigma$ на плоскость XOY непременно измерима B.

Пусть Ξ эта проекция и θ — ее дополнение относительно грани куба $z=0$. Множество θ измеримо B.

Пусть M — любая точка из θ и P_M — перпендикуляр к плоскости $z=0$, проведенный через M. Так как точка M принадлежит к θ, то ясно, что P_M не пересекает множества $\Lambda\Sigma$.

Отсюда следует, что все точки Λ, лежащие на P_M, принадлежат к S. Но в силу свойства кривых L точки P, принадлежащие к Λ, образуют множество, подобное множеству R_{x_0}. По самому определению S мы заключаем, что точка x_0 удовлетворяет первому из указанных выше случаев.

Итак, взяв проекцию θ на ось OX, мы получим только точки x_0, удовлетворяющие первому условию. Но легко видеть, что и обратное также справедливо.

В самом деле, пусть x_0 удовлетворяет первому условию. Это значит, что множество R_{x_0} подобно части (в широком смысле) множества R'_{x_0}, пусть e эта часть. Точки Λ, лежащие в плоскости $x=x_0$, образуют множество кривых $L_i^{x_0}$, которое соответствует множеству R_{x_0}. Но в силу универсального свойства этого множества кривых на прямой $z=0$, $x=x_0$ существует точка M такая, что перпендикуляр P_M пересекает Λ как раз по множеству, тождественному e. Следовательно, все точки Λ, лежащие на P_M, принадлежат к S. Отсюда следует, что множества Λ и Σ не имеют общей точки на P_M. Следовательно, точка M принадлежит множеству θ.

Итак, ортогональная проекция множества θ на ось OX в точности совпадает со множеством точек x_0, удовлетворяющих первому условию. Но мы видели, что θ измеримо B, значит, его проекция есть *аналитическое* множество. Ч. т. д.

Резюмируем все, что было изложено в этой последней части. Пусть C и C' — два решета, расположенных в плоскости XOY, x — любая точка на оси OX, P_x — перпендикуляр в точке x к оси OX, лежащий в плоскости XOY. Пусть R_x и R'_x — множества точек C и C', лежащих на P_x.

Мы предполагаем, что решета C и C' образованы каждое из счетного числа прямолинейных сегментов, параллельных оси OX и имеющих *рациональные* координаты y. Мы знаем (стр. 194), что всякое линейное аналитическое множество E можно считать просеянным при помощи решета такой природы.

Обозначим через H множество всех тех точек x, для которых R_x подобно части (в широком смысле) R'_x. Точно так же обозначим через H' множество всех точек x, для которых R'_x подобно части R_x (в широком смысле).

Результат, который мы только что получили, состоит в том, что так определенные множества H и H' суть *аналитические* множества.

Доказательство второго принципа. Возьмем в плоскости XOY квадрат, стороны которого имеют уравнения

$$x = 0, \qquad x = 1, \qquad y = 0, \qquad y = 1.$$

Пусть E_1 и E_2 — два любых аналитических множества, расположенных в интервале $(0 < x < 1)$.

Проведем прямую $y = \frac{1}{2}$ и рассмотрим два решета C_1 и C_2, из которых первое расположено ниже, а второе выше этой прямой; мы предполагаем, что эти решета определяют соответственно множества E_1 и E_2 и природа их такая, как мы рассматривали выше.

Пусть E есть общая часть E_1 и E_2, E_1E_2. Обозначим через R_1 множество точек E_1, которые не входят в E_2, и соответственно через R_2 множество точек E_2, которые не входят в E_1:

$$R_1 = E_1 - E_2, \qquad R_2 = E_2 - E_1.$$

Надо доказать, что R_1 и R_2 одновременно отделимы при помощи двух аналитических дополнений.

Пусть x — любая точка на $(0,1)$ и P_x — перпендикуляр в этой точке к оси OX; обозначим через R'_x и R''_x соответственно части решет C_1 и C_2, лежащие на P_x.

Пусть H_1 — множество всех тех x, для которых R'_x не подобно никакой части (в широком смысле) R''_x, и соответственно, H_2 — множество всех тех x, для которых R''_x не подобно никакой части P'_x (в широком смысле). В силу предшествующего, множества H_1 и H_2 суть *аналитические дополнения*.

Обозначим через Γ_1 общую часть H_1 и CE_2 и через Γ_2 общую часть H_2 и CE_1:

$$\Gamma_1 = H_1 \cdot CE_2, \quad \Gamma_2 = H_2 \cdot CE_1.$$

Ясно, что Γ_1 и Γ_2 также аналитические дополнения.

Легко видеть, что Γ_1 содержит множество R_1. В самом деле, если x принадлежит к R_1, то множество R'_x не будет вполне упорядоченным в положительном направлении оси OY, тогда как R''_x, наверное, вполне упорядочено при том же условии относительно порядка точек, так как x принадлежит к E_1 и к CE_2. Точно так же доказывается, что Γ_2 содержит R_2.

Остается доказать, что Γ_1 и Γ_2 не имеют общих точек.

В самом деле, если бы точка x принадлежала и к Γ_1, и к Γ_2, то она принадлежала бы к CE_1 и к CE_2. Значит, множества R'_x и R''_x были бы вполне упорядочены. Но так как x принадлежит к H_1 и к H_2, то R'_x не подобно никакой части R''_x, и обратно, R''_x не подобно никакой части R'_x. Но это как раз невозможно, ибо R'_x и R''_x вполне упорядочены, а следовательно, одно из них подобно сегменту другого. Ч. т. д.

Итак, формулированный принцип доказан.

Как немедленное следствие этого принципа мы имеем:

Если $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — два аналитических дополнения и если мы устраним из $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ их общую часть, то остающиеся множества всегда одновременно отделимы при помощи двух аналитических дополнений.

В самом деле, обозначим через $\mathscr{E}$ общую часть $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, через R_1 — разность $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}$ и через R_2 — разность $\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}$.

Надо доказать, что R_1 и R_2 одновременно отделимы при помощи двух аналитических дополнений.

Обозначим через H_1 дополнение к $\mathcal{E}_2$ и через H_2 дополнение к $\mathcal{E}_1$; множества H_1 и H_2 — *аналитические*. Ясно, что H_1 содержит R_1 и не имеет общих точек с R_2; точно так же H_2 содержит R_2 и не имеет общих точек с R_1. Мы можем сказать, что R_1 и R_2 отделимы *друг от друга* при помощи двух аналитических множеств. Но мы видели (стр. 207), что в этом случае R_1 и R_2 *одновременно отделимы* при помощи двух аналитических дополнений. Ч. т. д.

Обращение второго принципа. Множества R_1 и R_2, о которых говорится во втором принципе, являются каждое *разностью двух аналитических множеств*, но эти разности некоторой особой природы. В самом деле, нельзя утверждать, что два *любых* множества, каждое из которых есть разность двух аналитических, всегда одновременно отделимы при помощи двух аналитических дополнений, если только у них нет общей точки: для этого достаточно принять за R_1 аналитическое множество, неизмеримое B, а за R_2 — его дополнение.

Чтобы узнать природу множеств, каждое из которых есть разность двух аналитических, и которые допускают одновременную отделимость при помощи двух аналитических дополнений, мы докажем теорему, являющуюся обращением второго принципа.

Обращение второго принципа. *Если E_1 и E_2 — два множества без общих точек, причем каждое из них есть разность двух аналитических множеств, и если E_1 и E_2 отделимы при помощи двух аналитических дополнений, тогда E_1 и E_2 получаются из двух аналитических множеств путем удаления их общей части*[1]).

Чтобы доказать это, положим

$$E_1 = E_1' - E_1'' \quad \text{и} \quad E_2 = E_2' - E_2'',$$

где множества E с двумя индексами *аналитические*. Мы можем написать

$$E_1 = E_1' \cdot CE_1'' \quad \text{и} \quad E_2 = E_2' \cdot CE_2''.$$

[1]) После опубликования в Comptes Rendus Ac. Sc. формулировки этого предложения Хаусдорф и Серпинский независимо пожелали сообщить мне свои доказательства его; эти доказательства, с точностью до обозначений, тождественны с данным в тексте.

Допустим, что E_1 и E_2 одновременно отделимы при помощи двух *аналитических дополнений* H_1 и H_2

$$E_1 \subset H_1, \quad E_2 \subset H_2; \quad H_1 \cdot H_2 = 0.$$

Так как E_1 принадлежит к H_1 и не имеет общей точки с H_2, то можно написать

$$E_1 = (E_1' \cdot CH_2)(CE_1'' \cdot H_1)$$

и точно так же

$$E_2 = (E_2' \cdot CH_1)(CE_2'' \cdot H_2).$$

Для сокращения мы обозначим через K_1 и K_2 первые скобки в каждом из этих равенств

$$K_1 = E_1' \cdot CH_2, \quad K_2 = E_2' \cdot CH_1.$$

Очевидно, множества K_1 и K_2 — *аналитические*. Вторые скобки каждого из равенств — аналитические дополнения; мы их обозначим через $C\Gamma_1$ и $C\Gamma_2$, предполагая Γ_1 и Γ_2 *аналитическими*.

Итак, мы имеем

$$C\Gamma_1 = CE_1'' \cdot H_1, \quad C\Gamma_2 = CE_2'' \cdot H_2$$

и, следовательно,

$$E_1 = K_1 \cdot C\Gamma_1, \quad E_2 = K_2 \cdot C\Gamma_2.$$

Положим, наконец,

$$H = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2; \quad \theta_1 = H + K_1 \quad \text{и} \quad \theta_2 = H + K_2.$$

Ясно, что H — аналитическое множество; значит, это же имеет место для θ_1 и θ_2.

Мы теперь докажем, что, удаляя из θ_1 и θ_2 их общую часть θ, мы получим в точности данные множества E_1 и E_2.

С этой целью мы заметим, что множества θ_1 и θ_2 могут быть написаны в виде

$$\theta_1 = H + K_1 \cdot CH = H + K_1(C\Gamma_1 + C\Gamma_2) = H + K_1 \cdot C\Gamma_1 = H + E_1$$

и

$$\theta_2 = H + K_2 \cdot CH = H + K_2(C\Gamma_1 + C\Gamma_2) = H + K_2 \cdot C\Gamma_2 = H + E_2,$$

так как K_1 и $C\Gamma_2$, очевидно, не имеют общих точек, так же как и K_2 и $C\Gamma_1$.

Так как множества E_1 и E_2, по предположению, не имеют общих точек, отсюда следует, что

$$\theta = \theta_1 \cdot \theta_2 = H.$$

Кроме того, E_1 и H, очевидно, не имеют общих точек, так же как E_2 и H. Следовательно,

$$\theta_1 - \theta = E_1 \quad \text{и} \quad \theta_2 - \theta = E_2.$$

Итак, E_1 и E_2 получаются удалением из двух аналитических множеств θ_1 и θ_2 их общей части θ. Ч. т. д.

Существование двух аналитических дополнений неотделимых B. Это существование очень важно, так как именно благодаря ему теория отделимости при помощи аналитических дополнений приобретает самостоятельный интерес. Если бы два аналитических дополнения были всегда отделимы B, если только у них нет общей точки, то все свелось бы к изучению отделимости B.

В силу чрезвычайной важности этого факта, мы дадим три доказательства существования двух аналитических дополнений неотделимых B.

Первое доказательство[1]). Пара (E_1, E_2) аналитических множеств E_1 и E_2, расположенных в плоскости XOY, называется *дважды универсальной*, если, каковы бы ни были линейные аналитические множества e_1 и e_2, существует прямая, параллельная оси OY и пересекающая E_1 по e_1, а E_2 по e_2.

Существуют дважды универсальные пары. Чтобы доказать это, рассмотрим в плоскости TOY универсальное аналитическое множество U, т. е. такое, что, пересекая его прямыми, параллельными оси OY, мы получим всевозможные линейные аналитические множества.

Пусть $t_1 = \varphi(t)$, $t_2 = \psi(x)$ — кривая Пеано, заполняющая всю плоскость T_1OT_2, причем функции φ и ψ непрерывны на $(0,1)$.

Рассмотрим преобразование плоскости TOY в плоскость XOY, полагая $t = \varphi(x)$, $y = y$; пусть U_1 есть прообраз U.

---

[1]) Другие доказательства находятся на стр. 262 и 265 этой книги. См. также исследования П. С. Новикова по теории неявных функций [20].

Аналогично, полагая $t = \psi(x)$, $y = y$, преобразуем TOY в XOY; пусть U_2 есть прообраз U. Ясно, что U_1 и U_2 — *аналитические* множества. Легко видеть, что пара (U_1, U_2) *дважды универсальна*. В самом деле, всегда существует такое x_0, что прямая $x = x_0$ пересекает U_1 и U_2 по двум заранее заданным аналитическим множествам e_1 и e_2.

Установив это, применим второй принцип к аналитическим множествам U_1 и U_2. Пусть R_1 и R_2 — множества, которые получаются, если из U_1 и U_2 удалить их общую часть. В силу второго принципа существует два аналитических дополнения H_1 и H_2 без общей точки, содержащие соответственно R_1 и R_2.

Я теперь утверждаю, что *аналитические дополнения H_1 и H_2 неотделимы B.*

В самом деле, если бы существовали два множества θ_1 и θ_2, измеримые B, без общей точки и содержащие соответственно H_1 и H_2, то каждая параллель к оси OY пересекала бы θ_1 и θ_2 по линейным множествам, измеримым B, и классов всегда низших, чем некоторое фиксированное трансфинитное число α. Но пара (U_1, U_2) дважды универсальна. Следовательно, существует прямая $x = x_0$, которая пересекает U_1 и U_2 по двум множествам e_1 и e_2, измеримым B, класса $\alpha + 1$ и взаимно дополнительным. Так как множества θ_1 и θ_2 соответственно содержат R_1 и R_2, ясно, что прямая $x = x_0$ пересекает θ_1 и θ_2 как раз по e_1 и e_2, что невозможно, так как класс e_1 превосходит α. Ч. т. д.

ГЛАВА IV

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

Общие замечания о неявных функциях

Проблема неявных функций. Целью этой главы является изучение функций, определенных неявно при помощи аналитических изображений, т. е. при помощи функций классификации Бэра[1]).

Рассмотрим аналитические соотношения

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_p)=0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_p)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_q(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_p)=0, \end{array}\right\} \qquad \text{(I)}$$

где функции f_i определены всюду в $m+p$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m y_1 y_2 \ldots y_p}$ и входят в классификацию Бэра.

Легко видеть, что изучение общего случая сводится к изучению системы (I), так как, если какая-либо из функций f_i этой системы не была бы повсюду определена, мы могли бы дополнить ее до функции, определенной во всей области без того, чтобы она перестала принадлежать к классификации Бэра и без изменения величин неявных функций; с другой стороны, если один из аргументов x_i или y_i не фигурирует в одном из уравнений, мы тем не менее можем его считать

---

[1]) Эта глава есть подробное изучение проблемы, поставленной Лебегом и решенной им для частного случая. См. Lebesgue «Sur les fonctions représentables analytiquement» (Journ. de Math., 1905, стр. 192).

зависящим от этого аргумента, подобно тому как постоянное число можно рассматривать, как зависящее от любого переменного.

Раз так, то проблема при заданной системе уравнений (I) состоит в изучении:

1° Области E существования неявных функций y_1, $y_2, \ldots, y_p$.

2° Природы этих неявных функций[1]).

Геометрическая постановка проблемы. Чтобы сделать это изучение возможно более ясным и простым, мы возьмем $m+p$-мерную область $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_p}$ и рассмотрим в этой области функцию F переменных x_i, y_j, определенную равенством

$$F = f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_q^2.$$

Так как функции f_i входят в классификацию Бэра, то это справедливо и для F. Следовательно, множество $\mathcal{E}$ точек

$$N(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_p)$$

этой области, в которых функция F обращается в нуль, необходимо *измеримо B*. Поэтому его ортогональная проекция E на m-мерную область $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$ есть *аналитическое* множество.

Мы покажем, что это аналитическое множество E есть *область существования неявных функций y_i*.

В самом деле, если точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ принадлежит к E, то найдется точка $N_0(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_p^0)$ в области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_p}$, имеющая M_0 своей проекцией. Так как функция F обращается в нуль в точке N_0, то это же верно и для каждой из f_i; следовательно, система уравнений (I) удовлетворена. Таким образом, в этом случае числа y_1^0, $y_2^0, \ldots, y_p^0$ суть значения неявных функций $y_1, y_2, \ldots, y_p$. *Обратно*, если точка M_0 не принадлежит к E, то функция F не обращается в нуль ни в какой из точек $N(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0,$ $y_1, \ldots, y_p)$, каковы бы ни были числа $y_1, y_2, \ldots, y_p$. Сле-

[1]) В классическом анализе (см. Hadamard, Sur les transform. ponct. Bull. de la Soc. math. France, т. 34, 1906, стр. 71) проблему можно рассматривать двумя различными способами, а именно, с точки зрения локальной или с точки зрения всей протяженности. Этого различия не будет в вопросе, который мы изучаем,

довательно, для каждой из этих точек N по крайней мере одна из функций f_i не равна нулю; таким образом, если мы положим

$$x_1 = x_1^0, \ x_2 = x_2^0, \ \ldots, \ x_m = x_m^0,$$

то не существует чисел y_i, удовлетворяющих всем уравнениям системы (I).

Итак, аналитическое множество E есть область существования неявных функций.

Мы дополним этот результат следующими замечаниями:

Замечание I. Изучение системы уравнений (I) сводится к изучению единственного уравнения $F = 0$, где F есть функция классификации Бэра. Следовательно, с геометрической точки зрения все сводится к изучению произвольного множества $\mathfrak{E}$, измеримого B, расположенного в $m+p$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_p}$, и взаимоотношений, которые существуют между этим множеством $\mathfrak{E}$ и его ортогональной проекцией E на $m+p$-мерную область $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$.

Замечание II. Областью E существования неявных функций y_i может быть *любое аналитическое множество*. В самом деле, если в области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$ дано любое аналитическое множество E, мы можем его рассматривать как ортогональную проекцию множества $\mathfrak{E}$, измеримого B и расположенного в $m+1$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y}$. Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)$, которая равна нулю на $\mathfrak{E}$ и 1 вне $\mathfrak{E}$, очевидно, входит в классификацию Бэра. Но уравнение

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = 0$$

определяет y как неявную функцию от переменных x_i, причем область существования этой функции в точности совпадает с E.

Итак, мы видим, что *проблема об области существования неявных функций сводится к вопросу о том, будет ли эта область измерима B в каждом рассматриваемом случае.*

Однозначные и многозначные неявные функции. Мы теперь обратим наше внимание на самые неявные функции y_i.

Пусть $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — любая точка области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$. Если точка M не принадлежит к аналитическому множеству E, то не существует никакой системы чисел $y_1, y_2, \ldots, y_p$, удовлетворяющих уравнениям (I). Если M принадлежит к E, то существуют системы чисел $y_1, y_2, \ldots, y_p$, удовлетворяющие уравнениям (I) и в общем случае их существует бесконечное множество.

Следовательно, если M принадлежит к E, то при заданном i, $1 \leqslant i \leqslant p$, неявная функция y_i имеет вполне определенное множество значений в точке M; это множество мы обозначим через $H_i^{(M)}$. Очевидно, это множество $H_i^{(M)}$ фактически содержит точки и, вообще говоря, меняется вместе с изменением точки M множества E.

Легко видеть, какова природа множества $H_i^{(M)}$. В самом деле, так как множество $\mathfrak{E}$ измеримо B, то множество точек, принадлежащих $\mathfrak{E}$, ортогональные проекции которых на область $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$ совпадают с M, очевидно, измеримо B; обозначим его через $\mathfrak{E}^{(M)}$. Но ясно, что $H_i^{(M)}$ есть ортогональная проекция $\mathfrak{E}^{(M)}$ на прямую $D_i^{(M)}$, проведенную через M параллельно оси OY_i.

Следовательно, $H_i^{(M)}$ есть *линейное аналитическое множество*.

Если проделать это построение для всех точек M из E, то ясно, что получается вполне определенное множество H_i, расположенное в $m+1$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y}$. Это множество H_i есть изображающее множество для неявной функции $y_i(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, так как для получения всех значений, принимаемых y_i в точке M, достаточно пересечь множество H_i перпендикуляром $D_i^{(M)}$ к области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$, проведенным через M в области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y}$.

Изображающее множество H_i есть, очевидно, ортогональная проекция $\mathfrak{E}$ на $m+1$-мерную область $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m y_i}$. Следовательно, H_i есть *аналитическое* множество. А так как множество $\mathfrak{E}$ есть произвольное множество, измеримое B, то ясно, что H_i есть, вообще говоря, аналитическое множество, неизмеримое B.

Из предшествующего следует, что неявная функция y_i в общем случае *многозначна*, так как, вообще говоря, перпендикуляр $D_i^{(M)}$ пересекает множество H_i в *нескольких* точках. В самом деле, аналитическое множество H_i, очевидно, может быть *произвольным* аналитическим множеством, так как всегда можно найти множество $\mathfrak{E}$, измеримое B, расположенное в $\mathcal{J}_{x_1 \dots x_m y_1 \dots y_p}$, проекция которого на $\mathcal{J}_{x_1 \dots x y_i}$ совпадает с H_i.

Таким образом, мы приходим к следующему результату:

Неявная функция y_i, вообще говоря, имеет область существования E, аналитическую и неизмеримую B, и для каждой точки M из E множество значений y_i есть линейное аналитическое множество $H_i^{(M)}$, которое, вообще говоря, неизмеримо B и, следовательно, имеет мощность континуума.

Следовательно, для каждой неявной функции y_i в каждой точке M области E может представиться только три случая:

1° Функция y_i имеет *единственное* значение в точке M;

2° Функция y_i имеет в точке M *счетное* (или конечное) множество значений;

3° Множество значений y_i в точке M *содержит совершенное множество* и, значит, имеет мощность континуума.

Мы увидим, что в первых двух случаях имеют место те самые законы, которые впервые были указаны Лебегом, тогда как третий случай совершенно неожиданно от них отличается.

Эффективное существование однозначного решения во всех случаях. Мы докажем, что во всех случаях можно назвать *однозначное решение* данной системы (I) уравнений.

Чтобы убедиться в этом, возьмем непрерывное параметрическое изображение множества $\mathfrak{E}$, измеримого B

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad \dots, \quad x_m = f_m(t),$$
$$y_1 = g_1(t), \quad \dots, \quad y_p = g_p(t).$$

Пусть $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ — любая точка множества E. Совместные уравнения

$$x_1^0 = f_1(t), \quad x_2^0 = f_2(t), \quad \dots, \quad x_m^0 = f_m(t)$$

определяют на порции (0,1) области $\mathcal{J}_t$ замкнутое множество, так как функции f_i непрерывны. Обозначим это множество через F_{M_0}.

Ясно, что если точка M_0 отличается от точки M_1, лежащей в E, то замкнутые множества F_{M_1} и F_{M_0} не имеют общих точек. С другой стороны, очевидно, что каждая точка t_0 порции (0,1) области $\mathcal{J}_t$ принадлежит замкнутому множеству F_M, соответствующему некоторой точке M из E: координаты этой точки M получаются, если положить $t=t_0$ в уравнениях $x_i=f_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, m$. Отсюда следует, что вся порция (0,1) области $\mathcal{J}_t$ разложена на замкнутые множества F_M, соответствующие точкам M из E.

Установив это, допустим, что мы можем назвать одну и только одну точку в каждом множестве F_M. Пусть L — множество так выбранных точек t. Я теперь утверждаю, что множество L позволяет нам назвать *однозначное решение*

$$y_1, y_2, \ldots, y_p$$

данной системы (I).

В самом деле, заставим t_0 пробегать множество L. Соответствующая точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ пробегает всю область существования E, причем двум различным значениям t соответствуют две различные точки M из E. С другой стороны, уравнения

$$y_1^0=g_1(t_0), \quad y_2^0=g_2(t_0), \ldots, y_p^0=g_p(t_0),$$

где t_0 есть точка из L, определяют вполне определенное решение

$$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0; \quad y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0$$

заданной системы (I). Итак, мы умеем назвать однозначное решение $y_1, y_2, \ldots, y_p$ системы (I).

Итак, все сводится к тому, чтобы назвать одну и только одну точку t в каждом замкнутом множестве F. Эта проблема не представляет никакой трудности, когда речь идет о замкнутых множествах в классическом смысле, т. е. когда не исключают из рассмотрений *рациональных* точек. Но в рассматриваемом нами случае речь идеть о множестве, замкнутом относительно области $\mathcal{J}_t$, и, следовательно, рациональными точками пренебрегают.

Чтобы преодолеть это небольшое затруднение, перенумеруем все интервалы Бэра, расположенные на порции (0,1) области $\mathcal{J}_t$, при помощи целых положительных чисел

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$$

Среди этих интервалов мы берем первый, пусть δ_{n_1}, который содержит точки из F. Пусть δ_{n_2} — первый интервал предыдущей последовательности, содержащийся в δ_{n_1} и содержащий точки F. Вообще, δ_{n_k} есть первый интервал предшествующей последовательности, содержащийся в $\delta_{n_{k-1}}$ и содержащий точки F. Убывающая последовательность $\delta_{n_1}, \delta_{n_2}, \ldots$ определяет иррациональную точку t, принадлежащую всем интервалам δ_{n_k}. Так как δ_{n_k} непременно содержит точки F и так как F замкнуто, точка t должна принадлежать к F. Итак, мы назвали точку во множестве F.

Таким образом, мы во всех случаях назвали однозначное решение $y_1, y_2, \ldots, y_p$, определенное во всей области существования E, но мы не знаем, какова природа этого решения. В дальнейшем мы увидим, что решение $y_1, y_2, \ldots, y_p$, так названное, составлено из *проективных* функций y_i, что и уточняет их природу.

Мы дополним полученный результат следующим замечанием: *если область существования E есть множество, неизмеримое B, то не существует ни одного решения $y_1, y_2, \ldots, y_p$, составленного из p однозначных функций, берущих свои значения от p функций классификации Бэра.*

Чтобы убедиться в этом, допустим, что мы имеем p функций

$$y_1 = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad y_2 = \Phi_2, \ldots, y_p = \Phi_p \qquad \text{(II)}$$

классификации Бэра, определенных во всей области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_p}$ и удовлетворяющих уравнениям (I), когда точка $M(x_1, \ldots, x_m)$ принадлежит к E.

Возьмем область $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_p}$ и рассмотрим в этой области множество точек $N(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_p)$, координаты которого удовлетворяют уравнениям (II); пусть $\mathcal{E}'$ это множество. Легко видеть, что $\mathcal{E}'$ измеримо B. В самом деле, функция

$$(y_1 - \Phi_1)^2 + (y_2 - \Phi_2)^2 + \ldots + (y_p - \Phi_p)^2$$

от $m+p$ действительных переменных x_i, y_j, очевидно, входит в классификацию Бэра. Следовательно, множество N точек, для которых эта функция равна нулю, измеримо B. Но это множество, очевидно, как раз совпадает с $\mathcal{E}'$.

Установив это, обозначим через H общую часть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$; множество H измеримо B. Так как H есть часть $\mathcal{E}$, то проекция H на $\mathcal{J}_{x_1 \dots x_m}$ принадлежит к E. С другой стороны, какова бы ни была точка $M(x_1, \dots, x_m)$ из E, точка из $\mathcal{E}'$

$$x_1, x_2, \dots, x_m,$$
$$y_1 = \Phi_1, \quad y_2 = \Phi_2, \dots, y_p = \Phi_p$$

удовлетворяет уравнениям системы (I); следовательно, эта точка принадлежит к $\mathcal{E}$, а значит, и к H. Отсюда следует, что проекция H на $\mathcal{J}_{x_1 \dots x_m}$ совпадает с E.

Из самого определения множества H следует, что двум различным точкам из H соответствуют две различные точки его проекции E. Отсюда мы заключаем (стр. 166), что E измеримо B, что противоречит гипотезе. Ч. т. д.

Таким образом, мы убедились, что в случае, когда область существования E неизмерима B, невозможно выбрать однозначное решение $y_1, y_2, \dots, y_p$, составленное из функций классификации Бэра. Это, однако, нисколько не препятствует тому, чтобы в однозначном решении какая-либо одна из неявных функций y_i была функцией классификации Бэра.

Исследования Лебега. Мы обязаны Лебегу первыми исследованиями о тождестве двух семейств функций: функций, определенных аналитически *явным* образом (y = аналитическому выражению от $x_1, x_2, \dots, x_m$) и функций, определенных аналитически *неявным* образом (аналитическое выражение от $x_1, x_2, \dots, x_m, y$ равно нулю). Обычно эти две категории функций не различают, так как на практике тот самый процесс, который доказывает существование неявной функции, дает и ее разложение; но тождество двух семейств не очевидно.

Лебег рассмотрел случай, где *каждой системе чисел, $x_1, x_2, \dots, x_m$ соответствует не более одной системы чисел $y_1, y_2, \dots, y_p$, удовлетворяющих предложенным уравнениям* (I), и указал следующие два закона, имеющие место в этом случае:

(L_1) Область существования E неявных функций $y_1, y_2, \dots, y_p$ есть множество, измеримое B;

(L_2) Каждая неявная функция y_i совпадает на E с некоторой *однозначной* функцией $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$, входящей в классификацию Бэра и всюду определенной.

Естественно стараться узнать, сохраняются ли эти два закона Лебега во всех случаях, которые могут представиться. Среди других случаев, кроме рассмотренного, наиболее интересными являются следующие:

I. одна из неявных функций, пусть y_i, однозначна, а о других неявных функциях ничего неизвестно;

II. все неявные функции $y_1, y_2, \ldots, y_p$ допускают не более счетного множества значений в каждой точке области существования E;

III. одна из неявных функций, пусть y_j допускает не более счетного множества значений в каждой точке области существования E, а об остальных неявных функциях ничего не известно;

IV. общий случай, где не делается никаких гипотез о неявных функциях.

Мы увидим, что случай II во всех отношениях аналогичен основному случаю Лебега, так как его законы (L_1) и (L_2) сохраняются в этом случае. Точно так же случай III аналогичен случаю I, так как в обоих этих случаях закон (L_1) не сохраняется, тогда как закон (L_2) частично сохраняется. Наконец, в общем случае IV ни закон (L_1), ни закон (L_2) не сохраняются.

Изучение однозначных неявных функций. Исследования Лебега

Основной случай Лебега, где решение однозначно и единственно. Мы начнем с изучения основного случая, рассмотренного самим Лебегом; это тот случай, когда система (I) допускает единственное решение для каждой точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ области существования E.

Область существования. Из предшествующего немедленно следует, что в основном случае Лебега область существования E измерима B. В самом деле, достаточно заметить, что E есть ортогональная проекция на $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ множества $\mathfrak{E}$, измеримого B, и что проекции двух различных точек $\mathfrak{E}$ всегда различны. Отсюда мы заключаем (стр. 166), что E измеримо B.

Таким образом, мы приходим к первому закону (L_1) Лебега:

Теорема I. *Если система уравнений допускает единственное решение для каждой точки области существования, то эта область существования необходимо измерима B.*

Природа неявных функций. Мы докажем, что в рассматриваемом случае единственное решение $y_1, y_2, \ldots, y_p$ предложенной системы (I) образовано из функций классификации Бэра.

В самом деле, рассмотрим какую-нибудь неявную функцию

$$y_i = \Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

В силу известной теоремы Лебега (стр. 144), для того чтобы некоторая функция $y = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ входила в классификацию Бэра, необходимо и достаточно, чтобы, какова бы ни была порция (a, b) области $\mathcal{J}_y$, множество точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, для которых мы имеем неравенство $a < y < b$, было измеримо B.

Применим этот критерий к неявной функции y_i. Пусть

$$x_1 = f_1(t), \ldots, x_m = f_m(t);$$
$$y_1 = g_1(t), \ldots, y_p = g_p(t)$$

есть регулярное параметрическое изображение множества $\mathcal{E}$; мы предполагаем, что все функции f_i и g_i непрерывны и определены на порции (0,1) области $\mathcal{J}_t$.

Так как функция $g_i(t)$ непрерывна, множество значений, для которых $a < g_i(t) < b$, измеримо B; обозначим это множество буквой e. Если мы заставим t пробегать e, то множество соответствующих точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ из E необходимо измеримо B, так как двум различным точкам e отвечают две различные точки E (стр. 167). Но это множество точек M есть как раз то, для которого мы имеем неравенства

$$a < \Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) < b.$$

Следовательно, неявная функция $y = \Phi_i$ входит в классификацию Бэра. Ч. т. д.

Остается лишь сделать одно замечание, касающееся неявной функции Φ_i. В настоящий момент эта функция определена лишь на области существования E. Но мы можем закончить ее определение, полагая ее равной любому постоянному C вне E. Так как E измеримо B, то функция Φ_i, дополненная таким образом, заведомо входит в классификацию

Бэра. Следовательно, мы можем рассматривать неявную функцию y_i как часть явной функции классификации Бэра, всюду определенной, но рассматриваемой только на множестве E, измеримом B. Таким образом, мы приходим ко второму закону (L_2) Лебега:

Теорема II. *Если система уравнений допускает единственное решение для каждой точки области существования, то это решение состоит из функций y_i, входящих в классификацию Бэра.*

Случай I, когда одна из неявных функций однозначна[1]. В общем случае система уравнений (I) не допускает единственного однозначного решения и, следовательно, существуют точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ из E, которым соответствует *несколько* систем значений $y_1, y_2, \ldots, y_p$. В этом случае по крайней мере одна из неявных функций $y_1, y_2, \ldots, y_p$ *многозначна.*

Мы изучим тот интересный случай, когда одна из неявных функций, например y_i, остается *однозначной.*

Область существования. В противоположность тому, что мы нашли в предыдущем случае, эта область может быть произвольным аналитическим множеством, значит неизмеримым B.

Чтобы убедиться в этом, возьмем в области $\mathcal{J}_x$ произвольное аналитическое множество E. Пусть $f(x)$—произвольная функция классификации Бэра. Возьмем в области $\mathcal{J}_{xy}$ множество H точек $P(x, y)$, для которых ордината y имеет значение, определенное уравнением $y = f(x)$, а абсцисса пробегает данное аналитическое множество E.

Легко видеть, что множество H есть аналитическое. В самом деле, если $x = \varphi(t)$ есть непрерывное параметрическое изображение E, то уравнения

$$x = \varphi(t), \quad y = f[\varphi(t)]$$

дают параметрическое изображение H при помощи функций классификации Бэра. Следовательно (стр. 145), H есть аналитическое множество.

Установив это, возьмем в трехмерной области $\mathcal{J}_{xyz}$ множество $\mathfrak{E}$, измеримое B, ортогональная проекция которого на

[1]) Этот случай был рассмотрен в моей заметке Sur le problème des fonctions implicites в Comptes Rendus 8 июля 1929 г.

плоскость XOY совпадает с H. Пусть $F(x, y, z)$ есть функция, равная 0 на $\mathfrak{E}$ и 1 вне $\mathfrak{E}$. Так как $\mathfrak{E}$ измеримо B, то функция $F(x, y, z)$ входит в классификацию Бэра. Но если мы рассмотрим уравнение

$$F(x, y, z)=0,$$

то область существования неявных функций y и z, очевидно, совпадает с E, причем неявная функция y однозначна, так как она равна $f(x)$ на E и не существует вне E.

Таким образом, мы констатируем, что *если одна из неявных функций (но не все) однозначна, то область существования может быть неизмерима B.*

Следовательно, закон (L_1) Лебега не сохраняется.

Природа однозначной неявной функции. Пусть

$$y=y_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

есть неявная функция, *однозначная* всюду в области существования E. Если мы геометрически изобразим эту функцию в $m+1$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1, x_2, \ldots, x_m y_i}$, мы получим аналитическое множество (стр. 226) H, ортогональная проекция которого на область $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ совпадает с E. Так как неявная функция y_i однозначна, то каждая параллель D_M к оси OY_i, проведенная через точку M из E, пересекает аналитическое множество H в одной и только одной точке. Отсюда следует, что две различные точки H имеют различные проекции. Из этого вытекает (стр. 166), что аналитическое множество H измеримо B в том и только в том случае, когда область существования E измерима B, что является частным случаем. Значит, вообще говоря, *изображающее множество H неизмеримо B.* Тем не менее, мы констатируем тот неожиданный факт, что в области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ можно провести однозначную поверхность S, измеримую B,

$$y_i=f(x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad (S)$$

которая проходит через все точки H.

Другими словами, *однозначная неявная функция, определенная на области существования E, совпадает с некоторой функцией классификации Бэра, определенной всюду на $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$.*

Мы видим, что это и есть второй закон (L_2) Лебега.

Этот факт есть прямое следствие одного общего предложения из геометрии.

Теорема. *Если $\mathfrak{E}$ есть аналитическое множество, расположенное в $m+1$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y}$, такое, что каждая параллель к оси OY пересекает $\mathfrak{E}$ не более чем в одной точке, то существует функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, входящая в классификацию Бэра, всюду определенная и такая, что множество $\mathfrak{E}$ лежит на поверхности S, определенной уравнением $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.*

Чтобы доказать это, возьмем непрерывное параметрическое изображение $\mathfrak{E}$

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t),\ y = \psi(t).$$

Обозначим через $\mathfrak{E}_1$ множество точек области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y}$, расположенных *под* $\mathfrak{E}$. Ясно, что координаты всех точек $\mathfrak{E}_1$ можно записать в виде

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ldots, \quad x_m = \varphi_m(t), \quad y = \psi(t) + \tau,$$

где τ — любое *отрицательное* число.

Аналогично, обозначим через $\mathfrak{E}_2$ множество точек, лежащих *над* $\mathfrak{E}$; все точки $\mathfrak{E}_2$ можно получить, приняв в предыдущих формулах за τ любое *положительное* число.

Очень легко доказать, что множества $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ — *аналитические*; достаточно заполнить кривой Пеано $t = g(u)$, $\tau = h(u)$ область $(0 < t < 1, -\infty < \tau < 0)$. Уравнения

$$x_1 = \varphi_1[g(u)],\ x_2 = \varphi_2[g(u)], \ldots, x_m = \varphi_m[g(u)],$$

$$y = \psi[g(u)] + h(u),$$

очевидно, дают параметрическое изображение $\mathfrak{E}_1$. Точно так же доказывается аналитичность множества $\mathfrak{E}_2$.

Так как аналитические множества $\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ не имеют общей точки, то они отделимы B. Пусть H есть множество, измеримое B, содержащее $\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1$ и не имеющее общей точки с $\mathfrak{E}_2$. Точно так же пусть H_2 — множество, измеримое B, содержащее $\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_2$ и не имеющее общей точки с $\mathfrak{E}_1$. Пусть H — общая часть H_1 и H_2. Ясно, что H есть множество, измеримое B, содержащее $\mathfrak{E}$ и такое, что всякая параллель к оси OY, проведенная через точку E, пересекает H в одной и только одной точке.

Установив это, обозначим через Q множество точек области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y}$, расположенных на всех параллелях к оси OY, каждая из которых пересекает H по крайней мере в двух различных точках. Так как ортогональная проекция Q на область $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$ есть аналитическое множество (стр. 169), то и само Q есть аналитическое множество.

Отсюда следует, что общая часть V множеств Q и H есть *аналитическое* множество. Но мы заметили, что каждая прямая, параллельная оси OY и проведенная через точку из E, пересекает H в одной и только одной точке. Значит, аналитические множества V и $\mathfrak{E}$ не имеют ни одной общей точки. Отсюда следует, что существует множество S', измеримое B, содержащее $\mathfrak{E}$ и не имеющее общей точки с V. Обозначим через S общую часть S' и H. Так как множества S' и H измеримы B, то и S будет таковым.

Легко видеть, что не существует ни одной параллели к оси OY, которая пересекает S в двух различных точках. В самом деле, если прямая D, параллельная оси OY, пересекает S в двух различных точках, то прямая D пересекает H в двух различных точках, а значит, D принадлежит к Q. Следовательно, все точки H, расположенные на D, принадлежат к V, что невозможно, так как среди этих точек есть точки S, а множества S и V не имеют общей точки.

Отсюда следует, что множество S есть множество, измеримое B, содержащее $\mathfrak{E}$ и такое, что каждая параллель к оси OY пересекает S не более, чем в одной точке. Поэтому проекция S на $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$ есть множество, измеримое B; обозначим его через σ.

Очевидно, что функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, равная любой постоянной вне σ и равная координатам y точек S на σ, есть функция классификации Бэра. С другой стороны, однозначная поверхность $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, очевидно, проходит через все точки множества $\mathfrak{E}$. Ч. т. д.

Природа множества точек, в которых неявная функция имеет единственное значение. Рассмотрим какую-нибудь неявную функцию $y_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и возьмем в области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$ представляющее ее множество H_i. Все значения, которые принимает y_i в какой-либо точке M области существования E, можно получить, пересекая множество H_i параллелью D_M к оси OY_i, проведенной через M.

Отсюда следует, что функция y_i имеет *единственное* значение в точке M, когда прямая D_M пересекает H_i в одной и только одной точке.

Так как множество H_i есть проекция $\mathfrak{E}$ на область $\mathcal{I}_{x_1 \ldots x_m y_i}$, то H_i есть *произвольное* аналитическое множество.

Итак, все сводится к определению природы множества E' тех точек области $\mathcal{I}_{x_1 \ldots x_m}$, в которых параллели к оси OY пересекают данное аналитическое множество H, лежащее в $\mathcal{I}_{x_1 \ldots x_m y}$, в одной и только одной точке.

Мы докажем, что E' есть *разность двух аналитических множеств*.

Чтобы убедиться в этом, обозначим через E проекцию H на область $\mathcal{I}_{x_1 \ldots x_m}$ и через E'' — множество точек этой области, в которых параллели к оси OY пересекают множество H не менее чем в двух различных точках. Так как множество H аналитическое, то и множества E и E'' будут аналитическими (стр. 169). Но рассматриваемое множество E' есть, очевидно, разность $E - E''$, что и доказывает наше предложение. Ч. т. д.

С другой стороны, обратное предложение, очевидно, также справедливо: каждое множество точек, являющееся разностью двух аналитических, может быть рассматриваемо как множество точек, в которых параллели к оси OY пересекают некоторое аналитическое множество в одной и только одной точке.

В общем случае разность двух аналитических множеств не есть ни аналитическое множество, ни аналитическое дополнение; это множество *новой природы*.

Легко видеть, какова природа множества, представляющего единственные значения неявной функции. Достаточно рассмотреть множество тех точек H, проекции которых принадлежат к E'. Так как множество H аналитическое, и так как множество точек H, проекции которых принадлежат к E'', тоже аналитическое, то рассматриваемое изображающее множество есть *разность двух аналитических множеств*.

Таким образом, мы заключаем, что *множество точек области* $\mathcal{J}_{x_1 \dots x_m y}$, *изображающих единственные значения неявной функции* y_i, *есть разность двух аналитических множеств, равно как и ортогональная проекция этого изображающего множества на* $\mathcal{J}_{x_1 \dots x_m}$ [1]).

Теперь легко узнать природу множества, образованного из точек области существования E, в которых уравнения (I) допускают *единственное решение.* Это множество есть, очевидно, общая часть множеств E'_i, $i = 1, 2, \dots, p$, каждое из которых есть разность двух аналитических: $E'_i = E - E''_i$. Так как эту разность можно представить в виде $E \cdot CE''_i$ и так как общая часть конечного числа аналитических дополнений есть опять аналитическое дополнение, мы заключаем, что *множество точек области существования E, в которых уравнения* (I) *допускают единственное решение, есть разность двух аналитических множеств.*

Изучение многозначных неявных функций со счетным множеством значений

Случай II, когда все неявные функции многозначны и имеют не более счетного множества значений [2]). Этот случай аналогичен случаю Лебега.

Область существования. Легко видеть, что эта область измерима B и, следовательно, первый закон (L_1) Лебега сохраняется. В самом деле, множество $\mathfrak{E}$, измеримое B, имеет своей проекцией область существования E, и притом каждая точка E есть проекция не более чем счетного множества точек $\mathfrak{E}$. Известно (стр. 178), что в этих условиях множество E измеримо B.

---

[1]) Мы увидим в конце этой главы, что если изображающее множество H для неявной функции y измеримо B (а не произвольное аналитическое множество), то множество, которое изображает единственные значения y_i, а также и проекция этого множества на $\mathcal{J}_{x_1 \dots x_m}$, оказываются оба аналитическими дополнениями. Это очень важный факт, доказательство которого представляет значительные трудности.

[2]) См. П. С. Новиков, Sur les fonctions implicites mesurables B, Fund. Math., т. XVII, 1931.

Природа неявных функций. Гораздо труднее установить природу неявных функций. Для того чтобы ее изучить, мы вынуждены рассмотреть структуру непрерывной *полурегулярной функции.*

Пусть $y = f(x)$ есть непрерывная и *полурегулярная* функция, определенная на порции (0,1) области $\mathcal{J}_x$; это значит, что каково бы ни было действительное число y_0, уравнение $y_0 = f(x)$ имеет не более счетного множества корней.

Итак, возьмем любое y_0 на оси OY. Пусть F_{y_0} есть множество корней уравнения $y_0 = f(x)$. Так как $f(x)$ непрерывна и полурегулярна, то множество F_{y_0} счетно (или конечно) и замкнуто в $\mathcal{J}_x$. Отсюда следует, что если мы возьмем последовательные производные от этого множества, мы придем к некоторому производному множеству, которое будет пустым (лишенным точек). Пусть α_{y_0} есть наименьшее трансфинитное число второго класса (или конечное), такое, что производное множество от F_{y_0} порядка α_{y_0} лишено точек. Это число α_{y_0} мы назовем *индексом остановки*, соответствующим точке y_0.

Установив это, мы докажем, что *индексы остановки ограничены для каждой непрерывной полурегулярной функции* $f(x)$. Это значит, что существует трансфинитное число второго класса (или конечное) β, которое превосходит всякий индекс остановки α_{y_0}, какова бы ни была точка y_0 на оси OY.

Допустим обратное; это значит, что каково бы ни было трансфинитное число γ второго класса, найдется точка y, для которой $\alpha_y > \gamma$.

Я теперь утверждаю, что на $\mathcal{J}_x$ существует два интервала Бэра, δ_1 и δ_2, без общих точек и такие, что, как бы велико ни было γ, производное порядка γ от F_y эффективно содержит точки в δ_1 и δ_2, если только y выбрано надлежащим образом.

В самом деле, мы можем выбрать точку y так, чтобы производное порядка γ от F_y содержало не менее двух различных точек. Пусть δ_1 и δ_2 — два интервала Бэра без общих точек, причем каждый из них эффективно содержит точки производного F_y. Так как существует лишь счетное множество пар интервалов Бэра, тогда как трансфинитных чисел γ несчетное множество, то пара δ_1 и δ_2 с указанным свойством должна существовать.

Установив это, допустим, что существует k интервалов Бэра $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ попарно без общих точек и таких, что, как бы велико ни было γ, производное порядка γ от F_y эффективно содержит точки в каждом из этих интервалов, если только y выбрано надлежащим образом. Мы докажем, что в этих условиях существует в каждом δ_i два интервала Бэра δ_i' и δ_i'' без общих точек и таких, что система из $2k$ интервалов $\delta_1', \delta_1'', \ldots, \delta_k', \delta_k''$ обладает тем же свойством.

В самом деле, на основании свойства интервалов $\delta_1, \ldots, \delta_k$, как бы велико ни было γ, можно найти точку y такую, что производное множество порядка γ от F_y содержит по крайней мере две различные точки x_i' и x_i'' в каждом δ_i. Заключим эти точки x_i' и x_i'' в два интервала Бэра δ_i' и δ_i'' без общих точек и содержащихся в δ_i. Так как существует лишь счетное множество систем интервалов δ_i' и δ_i'', $i = 1, 2, \ldots, k$, и так как трансфинитных чисел γ несчетное множество, мы заключаем, что существует система из $2k$ интервалов Бэра $\delta_1', \delta_1'', \ldots, \delta_k', \delta_k''$, обладающая указанным свойством.

Из предшествующего мы заключаем, что на $\mathcal{J}_x$ существует такое совершенное множество P, что каково бы ни было n, совершенное множество P содержится в 2^n интервалах Бэра попарно без общих точек $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{2^n}$ таких, что каждый из этих интервалов эффективно содержит точки замкнутого множества F_y при надлежаще выбранном y. Кроме того, порядок интервалов Бэра $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{2^n}$ можно предполагать как угодно высоким.

Так как $f(x)$ непрерывна на $\mathcal{J}_x$, отсюда следует, что $f(x)$ *постоянна* на P. В самом деле, в противном случае мы имели бы две точки P, x_1 и x_2, такие, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Эти две точки заключены в двух различных интервалах δ_i и δ_j системы $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{2^n}$. Так как длина этих интервалов стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает, то отсюда следует, что множества значений $f(x)$ на δ_i и δ_j не имеют общей точки. Но это невозможно, так как множество F_y для некоторого y имеет точки в δ_i и δ_j одновременно.

Таким образом мы приходим к заключению: если индексы остановки α_y неограничены, то существует точка y, для которой множество F_y несчетно, а следовательно, функция $f(x)$

не будет полурегулярной. Итак, в рассматриваемом нами случае индексы остановки ограничены. Ч. т. д.

Прежде чем приступить к изучению природы множества измеримого B, пересекаемого каждой параллелью к некоторому данному направлению не более чем в счетном множестве точек, мы докажем следующую лемму: *если $\mathfrak{E}$ есть множество, измеримое B, лежащее в $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_my}$ и такое, что всякая параллель к оси OY пересекает $\mathfrak{E}$ не более чем в счетном множестве точек, то множество E тех точек области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$, для которых параллели к оси OY пересекают $\mathfrak{E}$ в одной и только одной точке, измеримо B.*

Чтобы доказать это, возьмем на оси OY все рациональные точки $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ Пусть $\mathfrak{E}'_n$ и $\mathfrak{E}''_n$ — части $\mathfrak{E}$, для которых координата y соответственно меньше или больше r_n. Эти множества $\mathfrak{E}'_n$ и $\mathfrak{E}''_n$ измеримы B и таковы, что каждая параллель к оси OY пересекает их не более счетного числа раз. В силу предшествующего (стр. 178) проекции E'_n и E''_n множеств $\mathfrak{E}'_n$ и $\mathfrak{E}''_n$ на область $\mathcal{J}_{x_1\ldots x_m}$ измеримы B. Это же имеет место для общей части $E'_n \cdot E''_n$ и для суммы S всех этих общих частей, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Но множество S есть, очевидно, множество всех точек области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$, для которых параллель к оси OY пересекает $\mathfrak{E}$ по крайней мере *в двух* точках. С другой стороны, проекция E множества $\mathfrak{E}$ на $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$ также измерима B; поэтому то же справедливо и для разности $E - S$. Но эта разность, очевидно, совпадает с рассматриваемым множеством E'. Ч. т. д.

Установив это предварительное предложение, возвратимся к изучению структуры непрерывной полурегулярной функции $f(x)$. Мы хотим доказать следующее предложение: *если функция $f(x)$ непрерывна и полурегулярна, то кривую $y = f(x)$ можно разложить на счетное множество множеств, измеримых B и однозначных по отношению к оси OY.* Это значит, что всякая параллель к оси OX пересекает каждое из этих множеств не более чем в одной точке.

Чтобы доказать это важное предложение, рассмотрим в области $\mathcal{J}_{xy}$ все прямоугольники Бэра $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ Обозначим через Q_n множество точек кривой $y = f(x)$, лежащих в R_n. Рассмотрим множество всех параллелей к оси OX, пересекающих Q_n в одной и только одной точке. Пусть $L_n^{(0)}$ есть множество точек Q_n, лежащих на этих прямых. В силу предыдущих рассмотрений, $L_n^{(0)}$ есть множество, измеримое B.

Удалив из кривой $y=f(x)$ все точки, принадлежащие множествам $L_n^{(0)}$, мы получим в области $\mathcal{J}_{xy}$ множество $\mathcal{E}_0$, измеримое B; это множество получается непосредственно, если провести все параллели к оси OX и удалить из каждой из этих параллелей *изолированные* точки тех линейных замкнутых множеств, по которым эта параллель пересекает кривую.

Мы можем повторить эту операцию и удалить из $\mathcal{E}_0$ все изолированные точки, лежащие на параллелях к оси OX, что дает нам счетное множество новых множеств $L_1^{(1)}$, $L_2^{(1)}$, ..., $L_n^{(1)}$, ..., измеримых B и однозначных по отношению к оси OY. Легко видеть, что эту операцию можно повторять и что мы не встретимся ни с каким препятствием до тех пор, пока все точки кривой $y=f(x)$ не будут удалены. Но это, несомненно, случится после *счетного* множества указанных операций, *так как индексы остановки* α *ограничены.*

Итак, ***мы можем рассматривать кривую*** $y=f(x)$ ***как соединение счетного множества множеств, измеримых*** B: $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, ***однозначных по отношению к оси*** OY.

Этими рассуждениями наше предложение доказано, но мы хотим еще уточнить выбор однозначных множеств L_n.

Прежде всего мы можем предполагать, что множества L_n попарно без общих точек. Чтобы убедиться в этом, достаточно сохранить в L_n точки, которые не принадлежат ни одному из предыдущих множеств $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$, что не уничтожает измеримости B множества сохраненных точек.

Установив это, преобразуем множества L_n следующим образом: возьмем L_1 и прибавим к L_1 все точки L_n, проекции которых на ось OY не принадлежат ни к одной из проекций предшествующих множеств L_i, $i<n$. Если мы произведем эту операцию для каждого n, мы получим множество, измеримое B, однозначное по отношению к оси OY, проекция которого на OY совпадает с проекцией кривой $y=f(x)$. Обозначим это однозначное множество через Δ_1; ясно, что точки Δ_1 принадлежат к кривой $y=f(x)$ и что Δ_1 содержит L_1.

Удалим из каждого из членов последовательности $L_1, L_2, \ldots$ $\ldots, L_n, \ldots$ все точки, принадлежащие к Δ_1; первый член будет полностью удален. Но с остающимися частями множеств L_n, $n > 1$ мы можем повторить ту же операцию, и таким образом мы получим множество Δ_2, однозначное и измеримое B, без общей точки с L_1. Ясно, что сумма $\Delta_1 + \Delta_2$ содержит $L_1 + L_2$ и что проекция Δ_2 на QY в точности совпадает с множеством тех точек E, в которых параллели к оси OX пересекают кривую $y = f(x)$ по крайней мере *в двух* точках[1]).

Ясно, что если мы возобновим эту операцию и будем ее повторять неограниченно, мы получим конечную или бесконечную последовательность множеств, измеримых B,

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$$

попарно без общих точек, однозначных по отношению к оси OY, причем их соединение совпадает в точности с самой кривой $y = f(x)$. Важно заметить, что проекция Δ_{n+1} на OY содержится в проекции Δ_n. Но разность этих двух проекций есть *множество тех точек оси OY, в которых параллели к оси OX пересекают кривую $y = f(x)$ равно в n точках. Значит, это множество также измеримо B.*

Произведем другое преобразование множеств $L_1, L_2, \ldots$ $\ldots, L_n, \ldots$ Прежде всего прибавим к L_1 точки всех тех L_n, $n > 1$, проекции которых на OY не принадлежат ни к одной из проекций предшествующих множеств $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$. Этим способом мы получим множество, измеримое B, однозначное и проекция которого на OY совпадает с E; пусть λ_1 это множество. На плоскости XOY мы можем провести однозначную кривую $\mathscr{L}_1$, которая содержит множество λ_1 и задана уравнением $x = \psi_1(y)$, где ψ_1 есть однозначная функция классификации Бэра, всюду определенная на области $\mathscr{T}_y$.

Установив это, обозначим через L'_n и L''_n части множества L_n, расположенные соответственно ниже и выше однозначной и всюду определенной кривой $\mathscr{L}_1$. Очевидно, мы можем возобновить указанную операцию над последовательностями однозначных множеств $L'_2, L'_3, \ldots$ и $L''_2, L''_3, \ldots$, что

[1]) Напомним, что E есть проекция кривой $y = f(x)$ на ось OY.

дает нам две новые кривые, однозначные и определенные всюду на OY, пусть $\mathscr{L}_2$ и $\mathscr{L}_3$, из которых первая целиком лежит ниже $\mathscr{L}_1$, а вторая целиком выше $\mathscr{L}_1$. Важно заметить, что соединение кривых $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ и $\mathscr{L}_3$ содержит L_1 и L_2. Построенные кривые $\mathscr{L}_2$ и $\mathscr{L}_3$ задаются уравнениями $x=\psi_2(y)$ и $x=\psi_3(y)$, где ψ_2 и ψ_3 суть однозначные функции классификации Бэра, определенные всюду на OY.

Три построенные таким образом кривые $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ и $\mathscr{L}_3$ делят плоскость XOY на четыре части, и мы можем возобновить указанную операцию над частями множеств L_3, L_4, ..., содержащимися в этих частях плоскости; таким образом, мы получим четыре новые кривые $\mathscr{L}_4$, $\mathscr{L}_5$, $\mathscr{L}_6$, $\mathscr{L}_7$, однозначных и всюду определенных на OY.

Важно заметить, что соединение предыдущих кривых и этих кривых содержит кривые L_1, L_2, L_3.

Продолжая таким же образом, мы получим неограниченную (или конечную) последовательность кривых $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, ..., $\mathscr{L}_n$, ..., однозначных относительно оси OY и всюду определенных, соединение которых непременно содержит все точки рассматриваемой кривой $y=f(x)$; каковы бы ни были две кривые $\mathscr{L}_i$ и $\mathscr{L}_j$ из этой последовательности, одна из них расположена ниже другой. Кроме того, всякая кривая $\mathscr{L}_n$ задается уравнением $x=\psi_n(y)$, где ψ_n есть однозначная функция классификации Бэра, определенная всюду на OY.

В итоге, *точки кривой $y=f(x)$, где f есть непрерывная и полурегулярная функция, распределяются на не более чем счетном множестве однозначных относительно OY кривых; каждая из этих кривых задается уравнением $x=\psi(y)$, где ψ есть однозначная функция классификации Бэра, всюду определенная на OY; наконец, каждая из этих кривых лежит либо ниже, либо выше другой.*

После того как этот важный частный случай изучен подробно, мы рассмотрим несколько более общий случай. Требуется доказать, что *всякое множество $\mathscr{E}$, измеримое B, расположенное в плоской области $\mathscr{T}_{xy}$ и такое, что каждая параллель к оси OY пересекает $\mathscr{E}$ не более, чем в счетном множестве точек, есть соединение счетного множества множеств, измеримых B, и однозначных относительно оси OX.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно взять непрерывное регулярное изображение множества $\mathfrak{E}$

$$x = g(t), \quad y = h(t),$$

где, если это нужно, мы пренебрегаем счетным множеством точек $\mathfrak{E}$.

Так как всякая прямая $x = \text{const}$ пересекает $\mathfrak{E}$ не более чем в счетном множестве точек, то функция $g(t)$ полурегулярна. Следовательно, уравнение $x = g(t)$ определяет t как *обратную функцию* аргумента x, и легко видеть в силу полученного результата, что эта обратная функция есть соединение счетного множества *явных* однозначных функций

$$t = \omega_1(x), \quad t = \omega_2(x), \ \ldots, \quad t = \omega_n(x) \ldots,$$

входящих в классификацию Бэра; кроме того, каждая из этих функций ω_n рассматривается лишь на некотором множестве e_n, измеримом B, расположенном на $\mathcal{J}_x$.

Подставляя t в уравнение

$$y = h(t),$$

мы получаем счетное множество явных однозначных функций

$$y = h[\omega_1(x)], \quad y = h[\omega_2(x)], \ \ldots, \quad y = h[\omega_n(x)], \ \ldots,$$

входящих в классификацию Бэра. Заставляя x в уравнении $y = h[\omega_n(x)]$ пробегать множество e_n, мы получим в плоскости XOY множество L_n, однозначное относительно оси OX и измеримое B. Ясно, что данное множество $\mathfrak{E}$ есть соединение этих множеств L_n. Ч. т. д.

Перейдем теперь к общему случаю. Мы докажем следующую общую теорему[1]):

Теорема. *Если $\mathfrak{E}$ есть множество точек, лежащих в $m+1$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 \cdots x_m y}$, измеримое B и такое, что каждая параллель к оси OY пересекает $\mathfrak{E}$ не более чем в счетном множестве точек, то точки $\mathfrak{E}$ распределяются на счетном множестве однозначных поверхностей S_n, измеримых B, определенных уравнениями $y = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где каждая f_n есть однозначная*

---

[1]) См. мою заметку «Sur la représentation paramétrique semirégulière des ensembles» (C. R. Acad. Sc., 29 июля 1929).

функция классификации Бэра, определенная всюду в области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$; *кроме того, про любые две поверхности* S_i *и* S_j *можно утверждать, что одна из них лежит под другой.*

Чтобы доказать это, преобразуем m-мерную область $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$ в линейную область $\mathcal{J}_x$ при помощи взаимно однозначного и взаимно непрерывного преобразования (стр. 170).

Пусть

$$\left.\begin{aligned} x_1 = g_1(x), \quad x_2 = g_2(x), \; \ldots, \; x_m = g_m(x) \\ x = G(x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

и

— уравнения, определяющие это преобразование; функции g_i и G непрерывны.

Если мы прибавим к этим уравнениям тождество

$$y = y,$$

то получим взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование $m+1$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$ в плоскую область $\mathcal{J}_{xy}$. Известно (стр. 170), что множество, получаемое при таком преобразовании из множества, *измеримого B*, само *измеримо B* и того же класса и подкласса; кроме того, ясно, что множество, *однозначное* по отношению к оси OX в области $\mathcal{J}_{xy}$, преобразуется во множество, также *однозначное* относительно области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_n}$ в $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y}$ *и обратно.*

Установив это, обозначим через $\mathcal{E}'$ результат преобразования $\mathcal{E}$. Очевидно, что $\mathcal{E}'$ есть плоское множество, измеримое B, и что каждая параллель к оси OY пересекает $\mathcal{E}'$ не более чем в счетном множестве точек. Следовательно, множество $\mathcal{E}'$ есть соединение счетного множества множеств L_1', L_2', ..., измеримых B, однозначных относительно оси OX. Следовательно, данное множество $\mathcal{E}$, будучи прообразом $\mathcal{E}'$, есть соединение множеств L_1, L_2, ..., L_n...; здесь мы через L_n обозначаем прообраз L_n'. Все эти множества однозначны относительно области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$ и измеримы B.

Если над полученными однозначными множествами $L_1, L_2, \ldots$ мы будем оперировать так, как мы это делали раньше в случае полурегулярной функции $y=f(x)$, мы придем к последовательности поверхностей $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, содержащих точки данного множества $\mathfrak{E}$ и удовлетворяющих формулировке предложенной теоремы. Ч. т. д.

Установив это, вернемся к исследованию данной системы уравнений (I):

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_p)=0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_q(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_p)=0. \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

Мы предполагаем, что каждой системе чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m$ соответствует не более чем *счетное* множество систем чисел $y_1, y_2, \ldots, y_p$, удовлетворяющих этим уравнениям.

Возьмем две области $\mathcal{G}_{x_1 \ldots x_m}$ и $\mathcal{G}_{y_1 \ldots y_p}$ и преобразуем их соответственно в две линейные области $\mathcal{G}_x$ и $\mathcal{G}_y$ при помощи двух взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразований. Пусть

$$\left.\begin{array}{c} x_1=g_1(x),\ x_2=g_2(x), \ldots, x_m=g_m(x), \\ x=G(x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

и

$$\left.\begin{array}{c} y_1=h_1(y),\ y_2=h_2(y), \ldots, y_m=h_m(y), \\ y=H(y_1, y_2, \ldots, y_p) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

—уравнения, устанавливающие эти два преобразования.

Легко видеть, что уравнения (1) и (2), взятые вместе, устанавливают взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование $m+p$-мерной области $\mathcal{G}_{x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_p}$ в плоскую область $\mathcal{G}_{xy}$. Отсюда следует, что множество $\mathfrak{E}'$, являющееся результатом преобразования $\mathfrak{E}$, есть множество, измеримое B, расположенное на плоскости XOY и такое, что всякая параллель к оси OY пересекает $\mathfrak{E}'$ не более чем в счетном множестве точек.

Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_i, \ldots$ суть множества, измеримые B, однозначные по отношению к оси OX и такие, что их соединение совпадает с $\mathfrak{E}'$. Мы предполагаем, что L_i расположено на однозначной кривой $y=\overline{\omega}_i(x)$, где функция $\overline{\omega}_i(x)$ всюду определена и входит в классификацию Бэра.

Если мы подставим найденное значение $y=\overline{\omega}_i(x)$ в уравнения (2) и затем возьмем значение x из уравнений (1), то мы придем к *решению предложенной системы* (I), выраженному при помощи функций, входящих в классификацию Бэра, от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$y_1 = h_1\{\overline{\omega}_i[G(x_1, x_2, \ldots, x_m)]\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_p = h_p\{\overline{\omega}_i[G(x_1, x_2, \ldots, x_m)]\}.$$

Ясно, что написанные здесь сложные функции входят в классификацию Бэра и что полное решение предложенной системы (I) мы получим, полагая $i=1, 2, 3, \ldots$

Итак, мы приходим к следующему заключению: *полное решение предложенной системы уравнений образовано из счетного множества систем из p функций $\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \ldots, \varphi_p^{(i)}$, входящих в классификацию Бэра; каждая из этих систем удовлетворяет предложенным уравнениям на некоторой части E_k области существования E, причем эта часть измерима B.*

Итак, закон (L_2) Лебега в этом случае сохраняется.

Случай III, где одна из неявных функций многозначна и имеет не более счетного множества значений. Этот случай аналогичен случаю I, где одна из неявных функций однозначна.

Область существования. Эта область, вообще говоря, неизмерима B, так как рассматриваемый случай содержит, как частный случай, случай I, а в случае I область существования может быть неизмерима B.

Итак, первый закон (L_1) Лебега уже не применим здесь.

Природа рассматриваемой неявной функции. Напротив, второй закон (L_2) Лебега остается в силе. В самом деле, мы увидим, что рассматриваемая неявная функция принимает значения со счетного множества *однозначных* неявных функций, входящих в классификацию Бэра.

С этой целью мы докажем следующую теорему из геометрии:

Теорема. *Если $\mathcal{E}$ есть аналитическое множество, лежащее в $m+1$-мерном пространстве $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y}$ и такое,* *что каждая параллель к оси OY пересекает $\mathcal{E}$ не более чем в счетном множестве точек, или не пересекает его совсем, то множество $\mathcal{E}$ можно рассматривать как часть некоторого множества H, измеримого B и обладающего тем же свойством.*

Прежде всего для упрощения доказательства этой теоремы мы сведем общий случай $m+1$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 \dots x_m y}$ к случаю *плоской* области $\mathcal{J}_{xy}$.

С этой целью преобразуем m-мерную область $\mathcal{J}_{x_1 \dots x_m}$ в линейную область $\mathcal{J}_x$ при помощи взаимно однозначного и взаимно непрерывного преобразования. Пусть

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = g_1(x), \quad x_2 = g_2(x), \quad \dots, \quad x_m = g_m(x), \\ x = G(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

—уравнения, устанавливающие это преобразование; функции g_i и G непрерывны.

Если мы прибавим к этим уравнениям (1) тождество

$$y = y,$$

то мы получим взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование $m+1$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 \dots x_m y}$ в плоскую область $\mathcal{J}_{xy}$. Если $\mathcal{E}$ есть аналитическое множество, расположенное в $\mathcal{J}_{x_1 \dots x_m y}$ и такое, что каждая параллель к оси OY пересекает $\mathcal{E}$ не более чем в счетном множестве точек, то образ $\mathcal{E}'$ множества $\mathcal{E}$ есть аналитическое множество, обладающее тем же свойством.

Допустим, что рассматриваемая теорема справедлива для плоской области и, следовательно, существует плоское множество H', измеримое B, содержащее аналитическое множество $\mathcal{E}'$ и такое, что каждая прямая, параллельная оси OY, пересекает H' не более чем в счетном множестве точек. Ясно, что прообраз H множества H' измерим B, содержит $\mathcal{E}$ и обладает опять тем же свойством.

Итак, все сводится к доказательству теоремы для *плоского* аналитического множества $\mathcal{E}$.

Мы начнем с того, что рассмотрим в трехмерной области $\mathcal{J}_{xyz}$ элементарное множество (стр. 141), проекция которого на плоскость XOY совпадает с данным аналитическим множеством $\mathfrak{E}$. Мы предполагаем (стр. 193), что элементарное множество Q есть общая часть сумм параллелепипедов рангов 1, 2, 3, ..., таких, что каждый параллелепипед ранга n содержит счетное множество параллелепипедов следующего $(n+1)$-го ранга, причем их проекции на ось OZ образуют возрастающую последовательность сегментов. Верхние грани этих параллелепипедов образуют решето (стр. 194) C, называемое *элементарным* и определяющее аналитическое множество $\mathfrak{E}$.

Пусть π — один из этих параллелепипедов. Обозначим через Q_π часть Q, содержащуюся в π, через C_π — часть C, содержащуюся в π, и через $\mathfrak{E}_\pi$ — проекцию Q_π на плоскость XOY. Легко видеть, что C_π есть решето, определяющее аналитическое множество $\mathfrak{E}_\pi$.

Пусть x — любая точка линейной области $\mathcal{G}_x$ и пусть P_x — перпендикуляр из точки x к оси OX, лежащий в плоскости XOY. Так как множество $\mathfrak{E}$ пересекается каждым P_x не более чем в счетном множестве точек, то дополнение $C\mathfrak{E}_\pi$ измеримо B на P_x.

Отсюда следует, что общая часть $C\mathfrak{E}_\pi$ и P_x содержится в *счетном* множестве конституант, измеримых B, на которые разлагается дополнение $C\mathfrak{E}_\pi$. Отсюда мы заключаем, что для каждого P_x существует конечное или трансфинитное число второго класса $\alpha_x^{(\pi)}$ такое, что сумма конституант с индексами, превосходящими или равными $\alpha_x^{(\pi)}$, содержит лишь счетное множество точек на P_x, причем это число $\alpha_x^{(\pi)}$ нельзя уменьшить, не теряя этого свойства.

Если мы рассмотрим все решето C, а не его часть, лежащую в некотором параллелепипеде π, то мы обозначим просто через α_x трансфинитное число, которое мы только что определили.

Установив это, мы докажем, что числа α_x *ограничены*, т. е. что существует трансфинитное число β второго класса, превосходящее каждое α_x, каково бы ни было x в области $\mathcal{G}_x$.

С этой целью допустим обратное, т. е. что числа α_x не ограничены. В этих условиях мы рассматриваем систему из k параллелепипедов $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$, проекции которых на плоскость XOY не имеют попарно общих точек, и которые обладают следующим свойством: каково бы ни было трансфинитное число γ, существует точка x такая, что у каждого множества $C\mathcal{E}_{\pi_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ по крайней мере одна конституанта с индексом, превосходящим γ, имеет *несчетное* множество точек на P_x. Такие системы $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ существуют, так как вся область $\mathcal{J}_{xyz}$ является такой системой $(k = 1)$.

Мы докажем, что каждый параллелепипед π_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ содержит пару параллелепипедов π_i' и π_i'' такую, что система из $2k$ параллелепипедов $\pi_1', \pi_1'', \ldots, \pi_k', \pi_k''$ обладает тем же свойством.

Чтобы доказать это, возьмем любое трансфинитное число γ. Пусть γ' есть трансфинитное число, превосходящее произведение $\gamma \cdot \omega^\omega$. В силу гипотезы о параллелепипедах $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ существует точка x, обладающая следующим свойством: каждое аналитическое дополнение $C\mathcal{E}_{\pi_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ имеет конституанту ϑ_i индекса, превосходящего γ', и содержащую несчетное множество точек на P_x. Так как общая часть $\vartheta_i \cdot P_x$ несчетна, то на P_x найдется такой сегмент Δ_i, что часть $\vartheta_i \cdot P_x$, содержащаяся в Δ_i, несчетна, тогда как часть $\vartheta_i \cdot P_x$, лежащая вне Δ_i, счетна, причем Δ_i есть наименьший сегмент, обладающий этим свойством.

Установив это, возьмем целое положительное n, настолько большое, чтобы все параллелепипеды ранга n, содержащиеся в параллелепипеде π_i, имели ребра меньше, чем $\frac{1}{3}$ длины Δ_i, каково бы ни было $i = 1, 2, \ldots, k$.

Разделим каждый сегмент Δ_i на три равные части и удалим центральную часть. Каждый из двух остающихся сегментов содержит несчетное множество точек $\vartheta_i \cdot P_x$. Выберем произвольно точку множества $\vartheta_i \cdot P_x$ в каждом из этих сегментов; пусть M_i' и M_i'' — эти точки. Легко видеть, что существует *несчетное* множество таких пар точек M_i' и M_i''. Проведем через точки M_i' и M_i'' прямые, параллельные оси OZ; пусть D_i' и D_i'' — эти параллели. Так как точки M_i' и M_i'' принадлежат к конституанте ϑ_i, отсюда следует, что прямые D_i' и D_i'' пересекают решето C_{π_i} по двум вполне упорядоченным множествам $R_{M_i'}$ и $R_{M_i''}$, каждому из которых соответствует трансфинитное число, превосходящее γ'. Но проекции параллелепипедов ранга n на ось OZ образуют вполне упорядоченное множество сегментов, которому соответствует трансфинитное число ω^n. Отсюда следует, что существует по крайней мере *два* параллелепипеда ранга n таких, что частям $R_{M_i'}$ и $R_{M_i''}$, содержащимся соответственно в этих параллелепипедах, соответствуют два трансфинитных числа, превосходящих γ. Очевидно, что проекции этих двух параллелепипедов ранга n на плоскость XOY не имеют общей точки, так как эти проекции содержат соответственно точки M_i' и M_i'' и имеют стороны, длина которых меньше, чем $\frac{1}{3}$ длины Δ_i.

Так как существует лишь счетное множество пар параллелепипедов ранга n и так как, с другой стороны, существует несчетное множество пар точек M_i' и M_i'', мы заключаем, что в каждом параллелепипеде π_i существует два параллелепипеда π_i' и π_i'' ранга n такие, что прямые D_i' и D_i'', проведенные через точки M_i' и M_i'', пересекают решета $C_{\pi_i'}$ и $C_{\pi_i''}$ по вполне упорядоченным множествам, которым соответствуют трансфинитные числа, превосходящие γ, причем таких точек M_i' и M_i'' несчетное множество.

Другими словами, мы доказали, что каково бы ни было трансфинитное число γ, перпендикуляр P_x содержит несчетное множество точек двух конституант с индексами, превосходящими γ, $\vartheta_{\pi_i'}$ и $\vartheta_{\pi_i''}$, аналитических дополнений $C\mathcal{E}_{\pi_i'}$ и $C\mathcal{E}_{\pi_i''}$; здесь аналитические множества $\mathcal{E}_{\pi_i'}$ и $\mathcal{E}_{\pi_i''}$ суть проекции элементарных множеств $Q_{\pi_i'}$ и $Q_{\pi_i''}$, содержащихся в параллелепипедах π_i' и π_i''.

Из предшествующего следует, что система из $2k$ параллелепипедов π_1', π_1'', ..., π_k', π_k'' обладает тем же свойством, как и начальная система k параллелепипедов [21].

Установив это, вернемся к доказательству формулированной теоремы. Выше мы определили для каждого перпендикуляра P_x трансфинитное число α_x и предположили, что числа α_x

неограничены, когда x пробегает область $\mathcal{T}_x$. При этой гипотезе мы доказали, что каждая система из k параллелепипедов $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$, обладающая специальным свойством, содержит систему из $2k$ параллелепипедов $\pi_1', \pi_1'', \ldots, \pi_k'\pi_k''$, обладающую тем же свойством. Так как проекции параллелепипедов $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ на плоскость XOY попарно не имеют общих точек и все имеют точки на одной и той же параллели к оси OY, то, повторяя этот процесс *неограниченно*, мы получим совершенное множество, содержащееся в элементарном множестве Q, проекция которого на плоскость XOY есть совершенное множество, лежащее на прямой, параллельной оси OY. Но это невозможно, так как проекция Q на плоскость XOY есть аналитическое множество $\mathcal{E}$, а мы знаем, что каждая параллель к оси OY пересекает $\mathcal{E}$ не более чем *по счетному* множеству точек.

Итак, трансфинитные числа α_x *ограничены.*

Установив это, возьмем трансфинитное число β второго класса, превосходящее все α_x. Рассмотрим все конституанты аналитического дополнения $C\mathcal{E}$, индексы которых меньше β. Пусть S есть соединение этих конституант; множество S, очевидно, измеримо B. Обозначим через H дополнение ко множеству S; множество H также измеримо B. Ясно, что H содержит данное аналитическое множество $\mathcal{E}$.

Я теперь утверждаю, что множество H пересекается каждой параллелью к оси OY не более чем в счетном множестве точек. В самом деле, в противном случае мы бы имели перпендикуляр P_x, содержащий несчетное множество точек из H. Эти точки образуют множество, измеримое B. Значит, это множество содержится в *счетном* множестве конституант $C\mathcal{E}$, причем эти конституанты имеют индексы, превосходящие β. Отсюда следует, что существует конституанта индекса, превосходящего β, и имеющая несчетное множество точек на перпендикуляре P_x. Но это невозможно, так как β превосходит α_x.

Итак, мы определили множество H, измеримое B, содержащее данное аналитическое множество $\mathcal{E}$ и такое, что каждая параллель к оси OY пересекает H не более, чем в счетном множестве точек, а это и доказывает высказанную теорему. Ч. т. д.

Из доказанной теоремы следует, что *всякое аналитическое множество* $\mathcal{E}$, *лежащее в* $m+1$*-мерной области*

$\mathcal{T}_{x_1 \dots x_m y}$ *и такое, что каждая параллель к оси OY пересекает $\mathfrak{E}$ не более чем в счетном множестве точек, есть соединение счетного множества аналитических множеств $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_k, \dots$, расположенных соответственно на однозначных поверхностях $y = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$, где φ_k суть явные функции классификации Бэра, определенные всюду на $\mathcal{T}_{x_1 \dots x_m}$.*

Чтобы применить этот результат к изучению неявных многозначных функций с не более чем счетным множеством значений, достаточно заметить, что многозначная неявная функция y_i имеет в качестве геометрического образа аналитическое множество $\mathfrak{E}^{(i)}$, лежащее в области $\mathcal{T}_{x_1 \dots x_m y_i}$ и получаемое проектированием множества $\mathfrak{E}$ на эту область. Если мы предположим, что неявная функция y_i имеет не более счетного множества значений, то аналитическое множество $\mathfrak{E}^{(i)}$ удовлетворяет условиям предыдущего результата.

Итак, *счетнозначная неявная функция y_i разлагается на счетное множество однозначных функций, входящих в классификацию Бэра*, а это показывает, что второй закон (L_2) Лебега частично сохраняет силу.

Изучение общего случая в проблеме неявных функций

Общие замечания. После того как были изучены естественно представлявшиеся частные случаи, мы переходим к общему случаю.

Изучение этих частных случаев показало нам, что область существования неявных функций бывает, в зависимости от того или иного случая, измерима или неизмерима B. Итак, первый закон Лебега иногда сохраняется, а иногда не сохраняется в этих частных случаях.

Напротив, второй закон (L_2) Лебега в этих частных случаях всегда сохраняется хотя бы частично. Точнее говоря, предполагая одну из неявных функций, например, y_i, имеющей не более счетного множества значений, мы видели, что можно каждой точке $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ области существования E привести в соответствие единственное число φ, выбранное среди значений этой неявной функции y_i в точке M так, что определенная этим способом однозначная функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ совпадает с некоторой функцией классификации Бэра.

Но мы увидим, что в общем случае, где относительно неявных функций ничего не предполагается, определение такой однозначной функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ становится невозможным. Это значит, что *хотя мы всегда можем образовать однозначную функцию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, выбирая соответствующим образом ее значения среди значений рассматриваемой неявной функции* (стр. 227), *но эта функция φ не совпадает на области существования E ни с какой функцией классификации Бэра.*

Эта невозможность становится почти банальной, если область существования *E неизмерима B*. Чтобы убедиться в этом, возьмем уравнение

$$F(x, y) = 0$$

такое, что область E существования неявной функции y неизмерима B. Так как F входит в классификацию Бэра, то множество $\mathfrak{E}$ точек плоскости XOY, в которых F обращается в нуль, измеримо B. Область существования E есть ортогональная проекция $\mathfrak{E}$ на ось OX. Если существует однозначная функция $\varphi(x)$, определенная на E, удовлетворяющая уравнению $F = 0$ и совпадающая на E с функцией, входящей в классификацию Бэра, то общая часть H множества $\mathfrak{E}$ и кривой $y = \varphi(x)$ есть *однозначное* множество, измеримое B. Следовательно, проекция H на ось OX должна быть измерима B, что невозможно, так как эта проекция совпадает с областью E. Ч. т. д.

Итак, изучение случая, когда область существования неизмерима B, не представляет никаких затруднений. Но не так обстоит дело, когда область существования измерима B. Однако мы увидим, что *есть случаи, когда область существования измерима B* (и даже совпадает с основной областью $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y}$) *и где тем не менее невозможно определить однозначную функцию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, входящую в классификацию Бэра, значения которой выбираются из значений многозначной неявной функции.*

Эти случаи очень важны, но, чтобы доказать, что такие случаи эффективно существуют, мы нуждаемся в некоторых предварительных рассмотрениях.

Прежде, чем перейти к доказательству, мы заметим, что речь идет о решении следующей проблемы из геометрии:

Найти множество $\mathfrak{E}$, измеримое B, расположенное в $m+1$-мерной области $\mathcal{G}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$, проекция которого на $\mathcal{G}_{x_1 \ldots x_m}$ совпадает со всей этой областью и которое обладает следующим свойством: не существует никакой поверхности S, определенной уравнением

$$y=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

где φ входит в классификацию Бэра, и каждая точка S принадлежит к $\mathfrak{E}$.

В самом деле, пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)$ есть характеристическая функция для множества $\mathfrak{E}$. Так как $\mathfrak{E}$ измеримо B, то F входит в классификацию Бэра. Так как каждая точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ области $\mathcal{G}_{x_1 \ldots x_m}$ есть проекция точек $\mathfrak{E}$, то уравнение $F(x_1, \ldots, x_m, y)=0$ допускает по крайней мере одно решение y для каждой системы чисел $x_1, \ldots, x_m$. Но в силу предполагаемого свойства множества $\mathfrak{E}$ ясно, что не существует никакого *однозначного* решения $y=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, где φ входит в классификацию Бэра. Ч. т. д.

Итак, все сводится к решению только что поставленной геометрической проблемы.

Точки единственности [1]. Для решения предложенной проблемы из геометрии нам понадобится одно важное понятие, а именно понятие *о точках единственности.*

Пусть $\mathfrak{E}$ — любое множество точек, расположенное в области $\mathcal{G}_{x_1 \ldots x_m y}$. Мы скажем, что точка $N(x_1, \ldots, x_m, y)$ из $\mathfrak{E}$ есть *точка единственности относительно оси OY*, если параллель к этой оси, проведенная через N, не пересекает $\mathfrak{E}$ ни в какой точке, отличной от N. Множество всех точек единственности называется *множеством единственности для* $\mathfrak{E}$ и будет обозначаться через $\mathfrak{E}_1$.

Пусть E — проекция $\mathfrak{E}$ на область $\mathcal{G}_{x_1 \ldots x_m}$. Пусть

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

[1]) В качестве метода для анализирования общего случая неявных функций я взял изучение точек единственности. См. мою заметку в Comptes Rendus Acad. Sc. 16 сентября 1929 г. Sur les points d'unicité d'un ensemble mesurable *B*.

есть однозначная функция, определенная на E, и S — поверхность, определенная уравнением $y = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$.

Ясно, что если каждая точка из S принадлежит к $\mathfrak{E}$, то эта поверхность непременно должна пройти через всякую точку единственности для $\mathfrak{E}$; это значит, что множество $\mathfrak{E}_1$ должно принадлежать к поверхности S.

Метод для разрешения поставленной проблемы из геометрии состоит в том, чтобы построить *множество $\mathfrak{E}$, измеримое B, у которого множество единственности $\mathfrak{E}_1$ таково, что* à priori *невозможно провести через $\mathfrak{E}_1$ однозначную поверхность S, определяемую при помощи функции классификации Бэра.*

Заметим, что легко установить природу множества единственности $\mathfrak{E}_1$ для множества $\mathfrak{E}$, измеримого B: это — *аналитическое дополнение.*

В самом деле, мы видели (стр. 169), что точки $M(x_1 \ldots x_m)$ области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$, в которых параллель к оси OY пересекает $\mathfrak{E}$ по крайней мере в двух точках, образуют аналитическое множество. Пусть E_2 — это множество. Так как $\mathfrak{E}$ измеримо B, то все точки $\mathfrak{E}$, проекции которых принадлежат к E_2, образуют множество $\mathfrak{E}_2$, которое должно быть аналитическим. Следовательно, точки $\mathfrak{E}$, не принадлежащие к $\mathfrak{E}_2$, образуют *аналитическое дополнение.* Но ясно, что это множество совпадает с $\mathfrak{E}_1$. Ч. т. д.

Проекция множества единственности. Проблема о природе этой проекции и ее редукция. Мы видели, что очень легко установить природу самого множества единственности $\mathfrak{E}_1$. Напротив, очень трудно узнать природу проекции E_1 множества единственности $\mathfrak{E}_1$. Следующие страницы имеют целью констатировать тот замечательный факт, что *множество E_1 есть также аналитическое дополнение.*

Чтобы избежать второстепенных осложнений в наших рассуждениях, мы начнем с редукции проблемы, упрощая природу множества E_1.

Пусть $\mathfrak{E}$ — множество, измеримое B, расположенное в $m+1$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y}$ и $\mathfrak{E}_1$ — множество единственности для $\mathfrak{E}$. Пусть E и E_1 — соответственно проекции $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{E}_1$ на область $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$.

Мы уже видели, что можно установить взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между точками области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$ и точками новой *линейной* области $\mathcal{J}_x$, причем это соответствие устанавливается формулами

$$\left.\begin{aligned} x_1 = f_1(x), \quad x_2 = f_2(x), \ \ldots, \ x_m = f_m(x), \\ x = F(x_1, x_2, \ldots, x_m), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где все функции f_i и F *непрерывны.*

Мы видели, что в этом соответствии двух областей $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$ и $\mathcal{J}_x$ каждому множеству, измеримому B, соответствует множество, измеримое B того же класса и что каждое аналитическое множество преобразуется в аналитическое.

Прибавляя к предыдущим уравнениям (1) тождество

$$y = y,$$

мы получаем преобразование $m+1$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y}$ в *плоскую* область $\mathcal{J}_{xy}$. Пусть ε, ε_1, e и e_1 — образы множеств $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$, E и E_1.

Ясно, что ε измеримо B, ε_1 — множество единственности для ε, e и e_1 — проекции ε и ε_1 на OX. Для того чтобы E_1 было аналитическим дополнением, необходимо и достаточно, чтобы e_1 было аналитическим дополнением.

Итак, все дело сводится к *плоской* проблеме. Но мы увидим, что возможно ее еще упростить.

С этой целью рассмотрим *регулярное и непрерывное* параметрическое изображение множества e (пренебрегая, быть может, счетным числом его точек). Пусть

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

это изображение; функции φ и ψ непрерывны на $\mathcal{J}_t$.

Рассмотрим на плоскости XOT кривую $x = \varphi(t)$. Множество значений $\varphi(t)$, очевидно, совпадает с e, тогда как e_1 есть множество всех тех точек x, в которых прямая, параллельная оси OT, пересекает кривую *один и только один раз.*

Итак, все сводится к выяснению природы множества e_1 тех точек x, в которых параллель к оси OT пересекает кривую $x = \varphi(t)$ один и только один раз, причем функция φ *непрерывна* на $\mathcal{J}_t$. Это и есть редукция проблемы.

Природа проекции множества единственности. Итак, надо изучить природу множества E тех точек y, для которых уравнение $y=f(x)$ имеет единственный корень, причем $f(x)$ непрерывна на $\mathcal{G}_x$.

Пусть $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ — все интервалы Бэра порядка 1 в интервале $(0<x<1)$. Пусть e_n — множество значений $f(x)$ на δ_n и пусть Δ_n — наименьший сегмент, содержащий e_n; Δ_n расположен на оси OY. Так как множества e_n аналитические, то к любым двум из них, например, к e_i и e_j, можно применить *второй принцип*. Обозначим через e_{ij} общую часть e_i и e_j, через R_{ij} и R_{ji} разности e_i-e_{ij} и e_j-e_{ji}. В силу второго принципа можно найти два *аналитических дополнения* H_{ij} и H_{ji} без общих точек, содержащие соответственно R_{ij} и R_{ji}. Очевидно, можно предположить, что H_{ij} содержится в Δ_i, а H_{ji} в Δ_j.

Установив это, *фиксируем* индекс i и заставим j пробегать все целые положительные числа, исключая i. Пусть H_i — общая часть всех этих H_{ij}

$$H_i=H_{i1}\cdot H_{i2}\ldots H_{i,i-1}\cdot H_{i,i+1}\ldots$$

Ясно, что H_i есть аналитическое дополнение, содержащееся в Δ_i. Легко видеть, что *все эти* H_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$ *не имеют попарно общих точек.*

Главное свойство H_i состоит в том, что это множество заведомо содержит все те точки y, для которых уравнение $y=f(x)$ имеет один и только один корень, причем этот корень лежит в δ_i.

В самом деле, каждая точка y, удовлетворяющая этому условию, принадлежит всем R_{ij}, значит, всем H_{ij} и, следовательно, множеству H_i.

Кроме того, для всякого y, принадлежащего к H_i, все корни уравнения $y=f(x)$ принадлежат к δ_i.

Таким образом, мы получили счетную последовательность $H_1, H_2, \ldots, H_n\ldots$ аналитических дополнений попарно без общих точек; их соединение содержит множество E_1. Мы назовем эти множества H_n *аналитическими дополнениями порядка* 1.

Чтобы определить аналитические дополнения *порядка* 2, мы берем любое множество H_i и соответствующий интервал Бэра δ_i. Мы делим δ_i на все интервалы Бэра порядка 2; пусть $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_k', \ldots$ эти интервалы. Обозначим через e_k'

множество значений $f(x)$ на δ'_k и через Δ'_k — наименьший сегмент оси OY, содержащий e'_k.

Мы можем оперировать с множествами e'_k таким же образом, как с ранее определенными множествами e_i и мы таким образом получим счетную последовательность аналитических дополнений H'_k попарно без общих точек, содержащихся в соответствующих Δ'_k и в H_i.

Важно заметить, что H'_k содержит все точки y, для которых уравнение $y=f(x)$ имеет один и только один корень, причем этот корень принадлежит к δ'_k.

Кроме того, для каждого y, принадлежащего к H'_i, все корни уравнения $y=f(x)$ принадлежат к δ'_k.

Все так определенные для каждого H_i множества H'_k мы назовем *аналитическими дополнениями порядка* 2.

Описанный нами процесс неограниченно продолжается и дает нам аналитические дополнения всех порядков.

Обозначим через S_n сумму всех аналитических дополнений порядка n; множество S_n есть аналитическое дополнение. Пусть, наконец, H есть общая часть всех S_n; *множество H есть, очевидно, аналитическое дополнение.*

Я теперь утверждаю, что *H в точности совпадает с множеством E_1, природу которого мы хотим определить.*

Прежде всего, H содержит E_1, так как каждое S_n, очевидно, содержит E_1.

С другой стороны, пусть y_0 есть точка H; так как S_n есть сумма аналитических дополнений попарно без общих точек, то y_0 принадлежит одному и только одному из них. Пусть h_n — это аналитическое дополнение, σ_n — наименьший сегмент, содержащий h_n и ϑ_n — интервал Бэра порядка n, соответствующий h_n. В силу свойства аналитических дополнений порядка n все корни уравнения $y_0=f(x)$ содержатся в ϑ_n.

Заставляя изменяться n, мы получаем неограниченную последовательность интервалов Бэра $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n, \ldots$ порядков соответственно 1, 2, 3, ..., содержащихся друг в друге. Следовательно, существует иррациональная точка x_0, принадлежащая всем ϑ_n.

Я теперь утверждаю, что $y_0 = f(x)$. В самом деле, обе точки y_0 и $f(x_0)$ принадлежат к ϑ_n, каково бы ни было n, а так как длина ϑ_n стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает, то *постоянные* точки y_0 и $f(x_0)$ должны совпасть.

С другой стороны, x_0 есть *единственный* корень уравнения $y_0 = f(x_0)$. В самом деле, все корни этого уравнения содержатся в ϑ_n, каково бы ни было n, а длина ϑ_n стремится к нулю.

Значит, множества H и E_1 тождественны и, следовательно, E_1 есть аналитическое дополнение. Ч. т. д.

Таким образом, мы приходим к следующему результату:

Теорема. *Каково бы ни было множество $\mathfrak{E}$, измеримое B, множество $\mathfrak{E}_1$ его точек единственности и проекция E_1 этого множества единственности являются оба аналитическими дополнениями.*

Важно заметить, что проекция E множества точек единственности $\mathfrak{E}_1$ есть *произвольное* аналитическое дополнение.

Чтобы убедиться в этом, ограничимся случаем множества $\mathfrak{E}$, измеримого B и лежащего на плоскости.

Пусть E_1 — совершенно произвольное линейное аналитическое дополнение, лежащее на оси OX. Множество CE_1 есть аналитическое множество. Значит, существует плоское множество H, измеримое B, проекция которого на ось OX совпадает с CE_1. Обозначим через $\mathfrak{E}$ соединение H и параллели к оси OX, не пересекающей H. Такие параллели всегда существуют, так как мы можем предположить, что множество H лежит между прямыми $y = 0$ и $y = 1$. Легко видеть, что $\mathfrak{E}$ измеримо B и имеет E_1 проекцией своего множества единственности.

Однако нельзя утверждать, что всякое плоское аналитическое дополнение θ, пересекаемое не более чем в одной точке каждой параллелью к оси OY, служит множеством единственности для некоторого плоского множества $\mathfrak{E}$, измеримого B.

В самом деле, если бы это было так, то проекция θ на ось OX была бы непременно аналитическим дополнением. Но в силу исследований Мазуркевича, которое мы изложили в главе V, проекция однозначного аналитического дополнения может, в некоторых случаях, быть *произвольным аналитическим множеством*.

Второе доказательство существования двух аналитических дополнений, неотделимых *B*. Доказательство предыдущей теоремы о природе проекции множества единственности и пример, который мы только что привели, дают нам вполне ясное указание на существование таких аналитических дополнений.

В самом деле, допустим противное, т. е. что всякие два аналитических дополнения H' и H'' без общих точек отделимы B. В этих условиях любые два множества, взаимно отделимые при помощи аналитических дополнений, просто отделимы B. Отсюда следует, что в предыдущем доказательстве мы можем предполагать все отделяющие множества H_{ij} просто *измеримыми* B. Из этого вытекает, что множества H_i всех порядков, а следовательно, и суммы $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ также измеримы B. Но множество H есть общая часть всех S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Поэтому H измеримо B и мы отсюда заключаем, что проекция множества единственности всегда измерима B.

Но это невозможно, так как мы показали, что проекция множества единственности может быть *произвольным* аналитическим дополнением, а следовательно, неизмеримым B. Ч. т. д.

Общий случай неявных функций. Отступление в сторону проекций множеств единственности было сделано с целью разрешения ранее поставленной проблемы из геометрии: найти в пространстве $OXYZ$ множество $\mathfrak{E}$, измеримое B, проекция которого на плоскость XOY совпадает с этой плоскостью и которое обладает следующим свойством: не существует никакой поверхности S, определенной уравнением $z = F(x, y)$, где F входит в классификацию Бэра, причем каждая точка S принадлежит к $\mathfrak{E}$.

Мы теперь дадим решение этой проблемы.

С этой целью возьмем функцию $\varphi(x, t)$, которую мы определили выше (стр. 147). Эта функция обладает следующими свойствами: 1° она определена для всех x и t, принадлежащих интервалу (0,1), и входит в класс 2 классификации Бэра; 2° какова бы ни была функция $f(x)$, определенная на $(0 < x < 1)$ и непрерывная для всякого иррационального x, существует такое иррациональное t_0, что мы тождественно имеем

$$\varphi(x, t_0) = f(x),$$

Установив это, возьмем в пространстве $OXYZ$ множество точек $M(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$x = \varphi(z, y).$$

Это множество, очевидно, измеримо B; мы его обозначим через H. Легко видеть, что H расположено ниже плоскости $z = 1$. Важно заметить, что множество H пересекается плоскостью $y = y_0$ по любой кривой, непрерывной для каждой иррациональной точки z.

Возьмем теперь на оси OX *произвольное* множество e, измеримое B. Мы можем определить функцию $f(z)$, непрерывную для всякого иррационального z и такую, что уравнение $x = f(z)$ дает регулярное параметрическое изображение множества e (с точностью до счетного множества точек e), когда z пробегает иррациональные точки от 0 до $\frac{1}{2}$, и дает в то же время регулярное параметрическое изображение (с точностью до счетного множества точек) дополнения Ce, когда z пробегает иррациональные точки от $\frac{1}{2}$ до 1. Но так как существует всегда число y_0 такое, что мы тождественно имеем

$$\varphi(z, y_0) = f(z),$$

то мы отсюда заключаем, что плоскость $y = y_0$ пересекает множество H по *однозначной* кривой

$$z = g(x),$$

где g есть функция, *обратная* для $f(z)$. Следовательно, эта функция $g(x)$ входит в классификацию Бэра.

Я теперь утверждаю, что *эта функция $g(x)$ может быть как угодно высокого класса.*

В самом деле, рассмотрим множество тех x, для которых мы имеем неравенство

$$0 < g(x) < \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что это множество в точности совпадает с множеством e. А так как множество e может быть выбрано из любого класса классификации Бэра, то мы заключаем[1]), что класс функции $g(x)$ может быть предположен как угодно высоким, если только e выбрано надлежащим образом.

Следовательно, множество H пересекается некоторыми плоскостями $y=y_0$ по *однозначным* кривым, входящим в классификацию Бэра и как угодно высоких классов.

Отсюда немедленно вытекает, что невозможно провести через точки единственности множества H однозначную поверхность $z=F(x, y)$, где F входит в классификацию Бэра, так как, если бы это было возможно, то класс этой поверхности был бы вполне определенным числом α, и все плоскости $y=\text{const}$ пересекали бы эту поверхность по кривым классов, не превосходящих α. Но мы видели, что классы этих кривых могут быть как угодно высоки.

Нам остается дополнить множество H, прибавляя к нему новое множество H', измеримое B, так, чтобы сумма $H+H'$ имела те же точки единственности, как и H, и чтобы в то же время проекция H на XOY совпадала со всей этой плоскостью.

Но это возможно в силу теоремы о природе проекции множества единственности. В самом деле, обозначим через $\mathscr{E}_1$ множество точек единственности для H и через E_1 — его проекцию на плоскость XOY. Мы знаем, что E_1 есть аналитическое дополнение. Значит, его дополнение CE_1 есть *аналитическое* множество. Поэтому существует множество θ_1, измеримое B, лежащее *под* плоскостью $z=1$, проекция которого на XOY совпадает с CE. Обозначим через θ_2 множество, симметричное с θ_1 по отношению к плоскости $z=1$.

Установив это, обозначим через H' сумму $\theta_1+\theta_2$. Множество $\mathscr{E}=H+H'$, очевидно, измеримо B и имеет своей проекцией на XOY всю эту плоскость. А так как множество единственности для $\mathscr{E}$, очевидно, совпадает с можеством един-

---

1) Речь идет о следующем предложении Лебега: *для того чтобы всюду определенная функция f была класса α, необходимо и достаточно, чтобы, каковы бы ни были a и b, множество точек, где мы имеем $a \leqslant f \leqslant b$, было класса $\leqslant \alpha$ и чтобы оно было эффективно класса α для некоторых значений a и b* («Sur les fonctions représ. analyt.», стр. 167, теорема IV).

Это предложение доказывается трансфинитной индукцией. См. также стр. 144 этой книги.

ственности для H, то мы получили решение поставленной проблемы. Ч. т. д.

Третье доказательство существования двух аналитических дополнений, неотделимых B. Мы теперь непосредственно укажем два аналитических дополнения без общих точек, неотделимые B.

Возьмем снова функцию

$$y = \varphi(x, t),$$

указанную выше. Свойства этой функции, которые нам будут нужны, таковы: 1° функция $\varphi(x, t)$ входит в классификацию Бэра; 2° какова бы ни была функция $f(x)$, непрерывная в каждой иррациональной точке, существует такое число t_0, что мы имеем тождество

$$\varphi(x, t_0) \equiv f(x).$$

Эта функция $y = \varphi(x, t)$ геометрически изображается в виде однозначной поверхности, расположенной в пространстве $OXTY$; мы обозначим эту поверхность через S.

Установив это, проведем плоскость $x = \frac{1}{2}$. Эта плоскость делит нашу поверхность на две части, S_1 и S_2.

Обозначим через $\mathscr{E}$ множество всех точек поверхности S, в которых прямая, параллельная оси OX, пересекает S в одной и *только одной* точке. Легко видеть, что множество $\mathscr{E}$ есть *множество единственности* для поверхности S по отношению к оси OX.

Пусть $\mathscr{E}'$ и $\mathscr{E}''$ — аналогичные множества единственности соответственно для поверхностей S_1 и S_2. Обозначим через E, E' и E'' соответственно проекции $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ и $\mathscr{E}''$ на плоскость TOY. В силу теоремы о природе проекции множества единственности, множества E, E' и E'' суть *аналитические дополнения*.

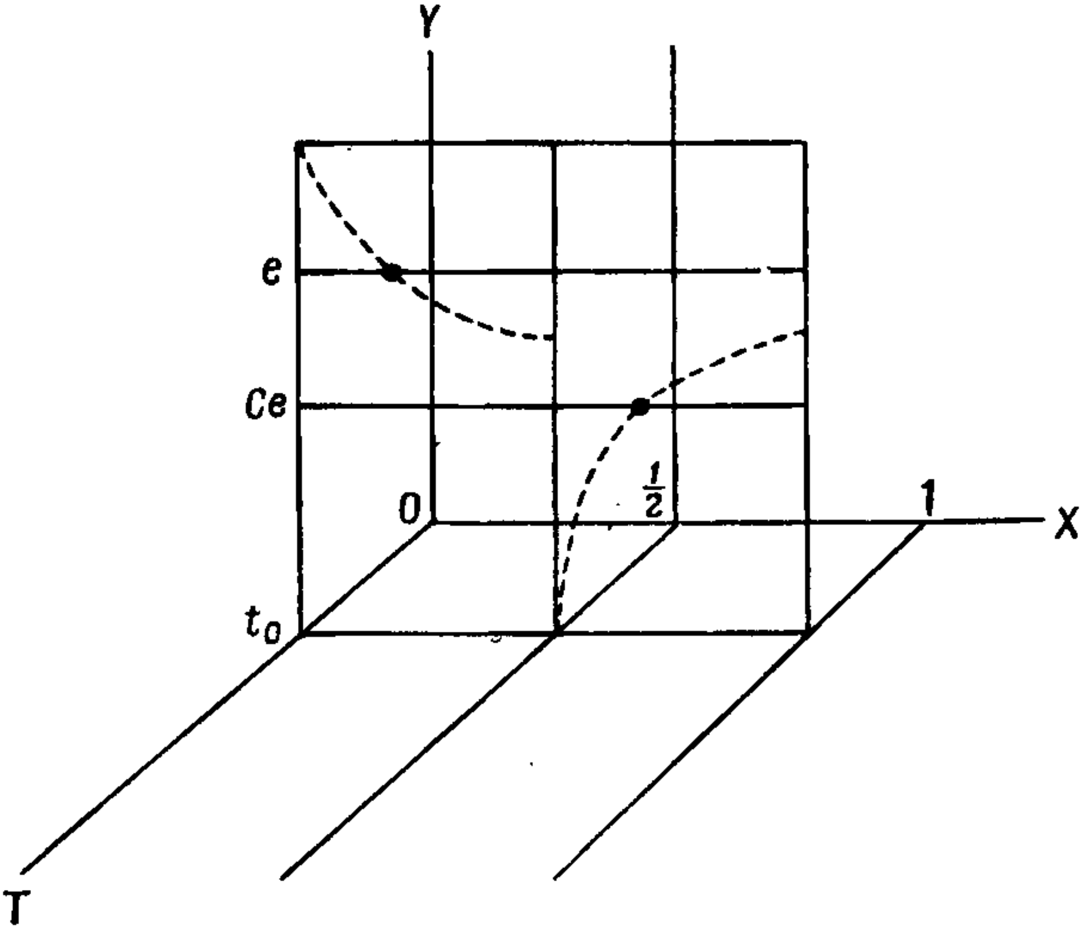
Пусть H_1 есть общая часть E и E', а H_2 — общая часть E и E'':

$$H_1 = E \cdot E', \quad H_2 = E \cdot E''.$$

Эти множества H_1 и H_2 являются также аналитическими дополнениями. Легко видеть, что H_1 и H_2 не имеют общей точки. В самом деле, если бы M принадлежало к H_1 и H_2, то параллель к оси OX, проходящая через M, пересекала бы S в одной единственной точке, что невозможно, так как она должна пересекать и S_1, и S_2.

Мы докажем, что H_1 и H_2 *неотделимы* B.

С этой целью возьмем любое линейное множество e, измеримое B; пусть Ce — его дополнение. Существует такое число t_0, что функция $\varphi(x, t_0)$ *разнозначна* на порции $(0, 1)$



Черт. 6.

области $\mathcal{J}_x$ и что ее значения образуют на порции $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ множество e, а на порции $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ множество Ce.

Если мы проведем плоскость $t = t_0$, мы видим, что она пересекает множество H_1 по e и множество H_2 по Ce.

Если бы H_1 и H_2 были отделимы B, то существовало бы два множества θ_1 и θ_2, измеримые B, без общих точек и содержащие соответственно H_1 и H_2. В этих условиях плоскость $t = t_0$ пересекала бы множества θ_1 и θ_2 по двум множествам, которые, очевидно, совпали бы с e и Ce. Но это как раз невозможно, так как плоское множество θ_1 есть множество вполне определенного класса α. Следовательно, пересекая θ_1 плоскостями $t = \text{const}$, мы получим линейные множества классов, не превосходящих α. Но множество e выбрано произвольно, значит, можно предполагать, что его класс выше α. Ч. т. д.

Метод П. С. Новикова. Выше мы доказали (стр. 255 и 262), что в общем случае неявных функций второй закон (L_2) Лебега больше неприменим. Это значит, что не существует никакой явной однозначной функции, входящей в классификацию Бэра и принимающей значения среди значений рассматриваемой многозначной неявной функции. Мы знаем (стр. 256), что этот вопрос сводится к построению множества $\mathcal{E}$, измеримого B, лежащего в пространстве $OXYZ$, проекция которого на плоскость XOY совпадает со всей этой плоскостью, и такого, что не существует ни одной однозначной поверхности S, входящей в классификацию Бэра, каждая точка которой принадлежит к $\mathcal{E}$. Мы построили такое множество, пользуясь свойствами множества единственности и его проекции.

П. С. Новиков решил эту проблему, опираясь на существование двух аналитических дополнений, неотделимых B[1]).

Вот метод П. С. Новикова:

Рассмотрим в плоскости XOY два аналитических дополнения E_1 и E_2 без общих точек и неотделимые B.

Возьмем в пространстве $OXYZ$ два множества, измеримых B, пусть H_1 и H_2, из которых первое лежит ниже плоскости $z=0$ и имеет проекцией дополнение CE_1 к множеству E_1, а второе лежит выше плоскости $z=0$ и имеет проекцией дополнение CE_2 к множеству E_2.

Соединение $H = H_1 + H_2$ есть множество, измеримое B, которое дает решение поставленной проблемы.

Вот доказательство П. С. Новикова:

Допустим, что существует однозначная поверхность S, заданная уравнением $z = F(x, y)$, где F входит в классификацию Бэра, причем каждая точка S принадлежит к H. Части S, расположенные соответственно ниже и выше плоскости $z=0$, обозначаются через S_1 и S_2. Множества S_1 и S_2, очевидно, однозначны и измеримы B.

---

[1]) Построение которых было дано им самим. См. его исследования о неявных функциях «Sur les fonctions implicites mesurables B» (Fund. Math., т. XVII, 1931).

Отсюда следует, что проекция σ_1 множества S_1 на плоскость XOY измерима B, так же как и аналогичная проекция σ_2 для S_2. Пусть σ — общая часть σ_1 и σ_2, $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$; множество σ, очевидно, измеримо B.

Пусть θ_1 есть разность $\sigma_1 - \sigma$ и соответственно θ_2 — разность $\sigma_2 - \sigma$. Ясно, что θ_1 и θ_2 измеримы и не имеют общих точек.

Мы докажем, следуя методу П. С. Новикова, что θ_1 и θ_2 отделяют множества E_1 и E_2.

В самом деле, пусть M есть точка E_1. Параллель к оси OZ, проведенная через M, не пересекает поверхности S_1, но пересекает поверхность S_2; следовательно, M принадлежит к σ_2. А так как M не принадлежит к σ_1, то она принадлежит к θ_2.

Итак, множество E_1 содержится в θ_2. Так же доказывается, что E_2 принадлежит к θ_1. Следовательно, множества θ_1 и θ_2 измеримы B и отделяют множества E_2 и E_1, что противоречит сделанной гипотезе. Ч. т. д.

ГЛАВА V

ПРОЕКТИВНЫЕ МНОЖЕСТВА

Определение проективного множества, его преобразование

Введение. В этой главе мы рассмотрим новое семейство точечных множеств, называемых *проективными*; их геометрическое происхождение очень ясно. Это важное семейство множеств содержит, как частный случай, все аналитические множества и их дополнения.

В математической литературе можно найти лишь очень немногие сведения о проективных множествах. Тем не менее, те минимальные результаты, которые мы имеем, показывают, что мы имеем дело с чрезвычайно важным семейством множеств, имеющих почти парадоксальные свойства.

Операция проектирования является одной из наиболее простых и в то же время наиболее важных операций в геометрии; эта операция позволяет образовывать новые множества, которые можно получить, отправляясь от уже известных множеств.

Рассматривая проектирование (P) как операцию и комбинируя ее с операцией (C), позволяющей переходить от множества к его дополнению, мы получаем, отправляясь от множеств, измеримых B, сначала все *аналитические* множества E, потом, отправляясь от их дополнений CE, новый класс множеств PCE совершенно неизвестной природы; потом, отправляясь от их дополнений $CPCE$, новые множества $PCPCE$, и так далее. Это и будут *проективные множества.*

Это общее определение проективного множества я дал в своих первых заметках по проективным множествам [1]). В этих

---

[1]) «Sur les ensembles projectifs...» (Comptes Rendus Acad. Sc. 25 мая 1925 г.). См. также мои заметки в Comptes Rendus Acad. Sc. «Sur un

заметках я указал те принципиальные трудности, которые вызываются теорией этих множеств, а также сомнения, касающиеся законности их определения. Я опустил в этих заметках и в своем мемуаре «Sur les ensembles analytiques»[1]) формулировки и доказательства положительных результатов об этих множествах, так как изложение их, казалось, должно было быть длинным и представлять лишь копию теории аналитических множеств[2]).

С другой стороны, Серпинский опубликовал в Fund. Mathem.[3]) статью «Sur une classe d'ensembles», где он очень ясно указал на трудности, возникающие при изучении даже весьма простых точечных множеств: неизвестно ничего ни об измеримости в смысле Лебега, ни о категории проекций плоских аналитических дополнений. Позднее Серпинский в заметке «Sur quelques propriétés des ensembles projectifs»[4]) формулировал первые теоремы из этой теории и дал их доказательства в ряде статей, появившихся в Fund. Mathem.[5]).

В этой главе я изложу некоторые *положительные* результаты из теории проективных множеств. При этом в формулировках и доказательствах я буду выдерживать возможно более полную аналогию с теорией аналитических множеств. Метод, которому я буду следовать, — геометрический; именно

---

problème de M. Emile Borel et les ensembles projectifs...» (4 мая 1925 г.); «Les propriétés des ensembles projectifs.» (15 июня 1925 г); «Sur les ensembles non-mesurables *B* et l'emploi de la diagonale...» (20 июля 1925 г.); «Sur un probléme de M. Borel et la méthode des résolvantes» (17 августа 1925 г.). «Remarques sur les ensembles projectifs» (24 октября 1927 г.).

[1]) Fund. Mathematicae, т. X, 1926.

[2]) Теория проективных множеств была предметом моих лекций, прочитанных в 1924—1925 гг. в Московском университете. Я сохранил в своих заметках и своем мемуаре лишь следы предложений, которые, однако, предполагают теорию проективных множеств достаточно разработанной. Таковы предложения о существовании, а также о сумме и о произведении проективных множеств.

[3]) Том 7, 1925, стр. 237—243.

[4]) Comptes Rendus Acad. Sc., 24 октября 1927.

[5]) Том XII, стр. 228 «Sur les familles inductives et projectives d'ensembles». См. также т. XI, стр. 117, «Sur les projections des ensembles complémentaires aux ensembles (*A*)» и т. XI, стр. 123, «Sur les produits des images continues des ensembles (*CA*)».

этим методом я, несколько лет тому назад, дал *техническое* изложение теории проективных множеств[1]).

Определение проективных множеств. Мы называем *проективным* всякое множество точек, которое можно получить, отправляясь от множества, измеримого B, при помощи двух основных геометрических операций, *повторенных конечное число раз*:

1° Взятие ортогональной проекции уже определенного множества E на область меньшего числа измерений

$$PE. \tag{P}$$

2° Взятие дополнения уже определенного множества E

$$CE. \tag{C}$$

Это определение проективного множества естественно приводит к определению *класса* проективного множества.

Мы скажем, что некоторое множество точек есть проективное множество класса n, если его можно представить в виде

$$PCP\ldots PE$$

или

$$CPC\ldots PE,$$

где E есть множество, измеримое B, лежащее в области любого числа измерений, и где буква P, чередуясь с буквой C, написана ровно n раз, причем такое изображение уже невозможно, если число n заменить меньшим числом.

Чтобы иметь возможно более полную аналогию с теорией аналитических множеств, их дополнений и множеств, измеримых B, мы будем различать в каждом классе проективных множеств три различных рода множеств:

I. Проективное множество $\mathscr{E}$ класса n мы назовем множеством *первого рода*, если его можно представить в виде

$$PCP\ldots PE$$

[1]) Я намеревался дать полное изложение лекций о проективных множествах, прочитанных мною в 1924—1925 гг. в Московском университете, в работе «Mémoire sur les ensembles analytiques et projectifs», первая часть которого появилась в Математическом Сборнике, т. 33, 1926, стр. 327.

и если его невозможно представить в виде $CPC \dots PE$, где буква P в обоих случаях написана ровно n раз. Для сокращения мы будем говорить в этом случае, что проективное множество $\mathcal{E}$ есть *аналитическое множество порядка n* и примем для него обозначение (A_n).

Эти множества во всех отношениях аналогичны обыкновенным аналитическим множествам, неизмеримым B.

II. Проективное множество $\mathcal{E}$ класса n мы назовем множеством *второго рода*, если его можно представить в виде

$$CPC \dots PE$$

и если его нельзя представить в виде $PCP \dots PE$, где буква P в обоих случаях написана ровно n раз. Для сокращения мы скажем, в этом случае, что проективное множество $\mathcal{E}$ есть *аналитическое дополнение порядка n* и примем для него обозначение (CA_n) [22].

Эти множества во всех отношениях аналогичны обыкновенным аналитическим дополнениям, неизмеримым B.

III. Проективное множество $\mathcal{E}$ класса n называется множеством *третьего рода*, если его возможно представить одновременно в обоих видах

$$PCP \dots PE' \quad \text{и} \quad CPC \dots PE'',$$

где буква P в обоих случаях написана ровно n раз, а множества E' и E'' измеримы B. Для сокращения мы будем говорить, в этом случае, что проективное множество $\mathcal{E}$ есть *двустороннее порядка n* или измеримое B порядка n; мы будем его обозначать через (B_n).

Эти множества аналогичны множествам, измеримым B в обычном смысле.

После того как эти определения установлены, легко видеть, что всякое аналитическое множество, неизмеримое B, есть множество (A_1), что его дополнение есть (CA_1), а каждое множество, измеримое B, есть (B_1) *и обратно*. Итак, теория аналитических множеств содержится в теории проективных множеств. Это замечание показывает, что понятие *проективного множества* является совершенно *естественным*.

Преобразование определения проективного множества. Прежде чем перейти к доказательству эффективного существования проективных множеств каждого класса и, в частности, множеств (A_n), (CA_n) и (B_n) в отдельности, мы преобразуем предложенное определение проективных множеств.

Вот каково это преобразование. Мы ввели операцию (P), которая состоит в том, чтобы брать ортогональную проекцию множества точек, лежащего в m-мерной области, на область меньшего числа, например m', измерений. Это число m' не обязательно равно $m-1$.

Тем не менее, мы покажем, что, не уменьшая общности определения проективного множества класса n, *можно предполагать, что каждая операция* (P), *фигурирующая в этом определении, уменьшает число измерений в точности на одну единицу*, в результате чего, если $\mathfrak{E}$ есть проективное множество класса n, лежащее в m-мерной основной области, то множество $\mathfrak{E}$ можно рассматривать, как получившееся из множества E, измеримого B и лежащего в области $m+n$ измерений.

Мы начнем со следующего замечания: если $M_0(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_\mu)$ есть точка μ-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_\mu}$, то ее проекция $N_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_\nu^0)$ на ν-мерную область $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_\nu}$, где $\nu < \mu$, получается сохранением ν первых координат точки M и отбрасыванием всех остальных.

Установив это, возьмем проективное множество $\mathfrak{E}$ класса n, расположенное в m-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$. Мы предполагаем, что $\mathfrak{E}$ получается из некоторого множества E, измеримого B, лежащего в p-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_p}$. Пусть $M(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ есть переменная точка, пробегающая область $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_p}$.

Так как каждая операция P уменьшает число координат на несколько единиц, то координаты точки M мы можем разделить на несколько групп:

$$(x_1 x_2 \ldots x_m)(x_{m+1} \ldots x_{\nu_1})(x_{\nu_1+1} \ldots x_{\nu_2}) \ldots (x_{\nu_{n-1}+1} \ldots x_p),$$

где число групп равно $n+1$.

Рассмотрим любую из этих групп, следующую за первой; пусть это будет группа $x_{\nu_{k-1}+1} \ldots x_{\nu_k}$. Мы можем установить взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование области $\mathcal{J}_{x_{\nu_{k-1}+1} \ldots x_{\nu_k}}$ на область $\mathcal{J}_{y_k}$. Мы, таким образом, получаем взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между областью $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_p}$ и некоторой новой областью $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_my_1\ldots y_n}$. Это преобразование областей ставит в соответствие множеству E, измеримому B и лежащему в области $\mathcal{J}_{x_1\ldots x_m\ldots x_p}$, множество E', также измеримое B и лежащее в области $\mathcal{J}_{x_1\ldots x_my_1\ldots y_n}$.

Если мы будем применять поочередно к множеству E, измеримому B, операции (P) и (C), для того чтобы в конце концов получить из него данное проективное множество $\mathcal{E}$, то мы последовательно уничтожим все скобки, начиная с последней, и мы придем к первой скобке $(x_1\ldots x_m)$, содержащей координаты точек множества $\mathcal{E}$.

Так как каждой из исчезнувших скобок соответствует одно и только одно число y, то ясно, что, применяя к множеству E', измеримому B, те же операции (P) и (C), мы, в итоге, придем *к тому же проективному множеству* $\mathcal{E}$.

Итак, мы приходим к следующему результату: *можно предполагать, что в определении проективного множества класса n каждая операция (P) уменьшает число измерений только на одну единицу.*

В частности, каждое *линейное* проективное множество класса n получается из $n+1$-мерного множества E, измеримого B.

Мы дополним этот результат следующим замечанием: *изучение проективных множеств, лежащих в многомерной области, сводится к изучению линейных проективных множеств.*

В самом деле, пусть $\mathcal{E}$ есть проективное множество, лежащее в области $\mathcal{J}_{x_1\ldots x_m}$. Соответствие

$$\left.\begin{aligned} x_1=g_1(y),\quad x_2=g_2(y),\ \ldots,\quad x_m=g_m(y);\\ y=G(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m),\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

где g_i и G непрерывны, установленное между точками рассматриваемой области $\mathcal{J}_{x_1\ldots x_m}$ и новой линейной области $\mathcal{J}_x$, преобразует данное проективное множество $\mathcal{E}$ в линейное множество $\mathcal{E}'$. В силу предшествующего очевидно, что преобразованное множество $\mathcal{E}'$ есть проективное множество того же класса и того же рода, как и $\mathcal{E}$.

Простейшие свойства проективных множеств

Проекции. Из результатов предыдущего параграфа следует, что *проекция множества* (A_n) *есть либо проективное множество класса ниже* n, *либо множество* (B_n), *либо множество* (A_n). *Точно так же проекция множества* (B_n) *либо класса ниже* n, *либо* (B_n), *либо* (A_n). *Только проекции множеств* (CA_n) *могут дать проективные множества высшего класса, именно:* (A_{n+1}) *или* (B_{n+1}).

В самом деле, если $\mathfrak{E}$ есть (A_n) или (B_n), то его можно представить в виде

$$PCP \ldots PE,$$

где буква P фигурирует n раз. Если мы проектируем $\mathfrak{E}$, то получаем множество вида

$$PPCP \ldots PE.$$

Но двойная операция (PP), очевидно, тождественна с простой операцией (P), уменьшающей число измерений по крайней мере на *две* единицы. Следовательно, результирующее множество можно записать, повторяя букву P не более, чем n раз (предыдущий параграф); значит, это множество *либо* класса $< n$, *либо* (B_n), *либо* (A_n). Ч. т. д.

Легко видеть, что установленное предложение аналогично теореме из теории аналитических множеств: проекция аналитического множества или множества, измеримого B, есть множество либо аналитическое, либо измеримое B; каждое аналитическое множество есть проекция множества, измеримого B.

В силу полной аналогии между множествами (A_n), (CA_n), (B_n), с одной стороны, и множествами аналитическими, их дополнениями и множествами, измеримыми B, с другой стороны, естественно возникает большое число важных проблем.

Чтобы поставить некоторые из этих проблем, удобно предварительно ввести следующую терминологию: мы скажем, что множество L, лежащее в плоской области $\mathcal{J}_{xy}$, есть *однозначная кривая*, если каждая параллель к оси OY пересекает L в одной и только одной точке. Точно так же мы скажем, что $\mathfrak{E}$ есть *однозначное множество относительно* *оси* OX, если всякая параллель к оси OY пересекает $\mathfrak{E}$ *не более*, чем в одной точке.

Установив эти определения, мы немедленно встречаемся со следующими вопросами:

Если $\mathfrak{E}$ есть плоское множество (B_n), однозначное относительно оси OX, должна ли проекция E множества $\mathfrak{E}$ на эту ось быть непременно множеством (B_n) или класса $< n$?

Имеет ли однозначное плоское множество класса $n-1$ своей проекцией множество (B_n) или класса $< n$? [23].

Можно идти дальше. Мы видели, что каждое однозначное аналитическое множество содержится в однозначной кривой, измеримой B (стр. 235), и что каждое множество E, измеримое B, пересекаемое всякой параллелью к оси OY не более чем в счетном множестве точек, составлено из счетного множества однозначных множеств, измеримых B (стр. 253).

Вполне естественно поставить аналогичные вопросы относительно проективных множеств (A_n) и (B_n).

Точно так же вполне естественно спросить себя, *будет ли всякое* плоское множество (A_n), пересекаемое каждой параллелью к оси OY не более чем по счетному множеству, содержаться во множестве (B_n), обладающем тем же свойством.

И аналогично, было бы чрезвычайно интересно доказать, что всякое плоское множество (CA_n), пересекаемое каждой параллелью к оси OY не более чем по счетному множеству, является соединением счетного множества *однозначных* (CA_n) [24].

Проективное множество, как множество значений некоторой функции. Мы видели, что всякое линейное аналитическое множество можно рассматривать, как множество значений, принимаемых на $\mathcal{J}_t$ некоторой непрерывной на $\mathcal{J}_t$ функцией $f(t)$.

Аналогично, мы докажем, что *всякое линейное множество* (A_n) *или* (B_n) *можно рассматривать, как множество значений, принимаемых на некотором проективном множестве* H *низшего класса функцией* $f(t)$, *непрерывной на* $\mathcal{J}_t$.

В самом деле, линейное множество E вида (A_n) или (B_n) можно рассматривать как проекцию плоского множества $\mathfrak{E}$ вида (CA_{n-1}). Мы предполагаем, что $\mathfrak{E}$ расположено в области $\mathcal{J}_{xy}$ и что E есть проекция $\mathfrak{E}$ на ось OX.

Преобразуем $\mathcal{J}_{xy}$ в новую линейную область $\mathcal{J}_t$ при помощи взаимно однозначного и взаимно непрерывного преобразования

$$\left.\begin{array}{c} x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \\ t = F(x, y), \end{array}\right\}$$

где φ, ψ и F непрерывны.

Известно, что в этом преобразовании каждому проективному множеству соответствует проективное множество того же класса и того же рода. В частности, множество $\mathcal{E}$ преобразуется в линейное множество H вида (CA_{n-1}), лежащее в области $\mathcal{J}_t$.

Легко видеть что непрерывная функция $x = \varphi(t)$ пробегает данное проективное множество E, когда t пробегает проективное множество H. Ч. т. д.

Если E есть проективное множество (A_n), лежащее в m-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, то мы преобразуем эту область в линейную область $\mathcal{J}_x$ при помощи формул

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = g_1(x), \quad x_2 = g_2(x), \ldots, x_m = g_m(x); \\ x = G(x_1, x_2, \ldots, x_m), \end{array}\right\} \tag{1}$$

где g_i и G непрерывны.

Образ E' множества E есть линейное множество (A_n). Следовательно, E' есть множество значений, принимаемых непрерывной функцией $x = \varphi(t)$ на некотором множестве H вида (CA_{n-1}). Если мы в функции $g_i(x)$ вместо x подставим $\varphi(t)$, то мы придем к следующему результату:

Всякое проективное множество (A_n) или (B_n), лежащее в m-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$, можно рассматривать как геометрическое место последовательных положений подвижной точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, координаты которой являются функциями переменного параметра t, непрерывными на $\mathcal{J}_t$,

$$x_1 = \omega_1(t), \quad x_2 = \omega_2(t), \ldots, x_m = \omega_m(t),$$

причем t пробегает проективное множество (CA_{n-1}).

Таким образом, мы получили *параметрическое изображение* множеств (A_n) и (B_n); легко видеть, что оно аналогично параметрическому изображению аналитических множеств.

Но, как только эта аналогия констатирована, естественно поставить следующие вопросы: можно ли для каждого множества B_n найти *регулярное* параметрическое изображение?

С другой стороны, если $\mathscr{E}$ есть множество (A_n), допускающее *регулярное* или полурегулярное параметрическое изображение, должно ли оно непременно быть множеством (B_n)? [25].

Множества параллелей. Для дальнейшего нам понадобится узнать природу множеств, образованных из точек, лежащих на прямых, перпендикулярных некоторой области и проходящих через точки некоторого проективного множества, лежащего в этой области.

Пусть E есть проективное множество класса n, лежащее в области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$. Будем рассматривать эту область, как часть области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m y}$, и проведем через каждую точку E прямую, параллельную оси OY. Пусть $\mathscr{E}$ есть множество точек, лежащих на всех этих прямых. Надо узнать природу $\mathscr{E}$.

Так как множество E есть проективное множество, то мы можем его получить, отправляясь от множества θ, измеримого B, и лежащего в области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_p}$ p измерений:

$$E = \ldots PCP\theta.$$

Мы можем предполагать, что здесь каждая операция (P) уменьшает число измерений на одну единицу.

Пусть $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ есть любая точка области $\mathcal{J}_{x_1x_2\ldots x_m}$. Точки N, лежащие на прямой, проходящей через M и параллельной оси OY, имеют координаты $y, x_1, x_2, \ldots, x_m$, где y есть любое число.

Если точка $M'(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_p)$ пробегает множество θ, измеримое B, то множество точек $N'(y, x_1, \ldots, x_p)$, где число *y произвольно*, пробегает множество θ', также измеримое B. Если мы применим ко множеству θ последовательные операции (P) и (C), то мы в конце концов придем к данному проективному множеству E. Те же операции, примененные ко множеству θ', дают нам, очевидно, множество $\mathscr{E}$, природу которого мы стремились узнать.

Итак, *множество $\mathfrak{E}$, образованное из точек, лежащих на параллелях, есть проективное множество того же класса и того же рода, как E.*

Сумма и произведение проективных множеств. Мы знаем, что сумма счетного множества аналитических множеств и общая часть счетного множества аналитических множеств суть опять аналитические множества. Аналогичный результат имеет место и для аналитических дополнений.

Именно, мы имеем в виду доказать следующую теорему:

Сумма и произведение конечного или счетного числа множеств (A_n), или (B_n) или класса $< n$ есть (A_n), или (B_n), или класса $< n$. Аналогичный результат имеет место для (CA_n) и (B_n).

Мы начнем с доказательства этой теоремы для суммы.

Пусть $S = E_1 + E_2 + \ldots + E_k + \ldots$ есть сумма счетного множества множеств (A_n) или (B_n). Мы предполагаем, что E_k есть линейное множество и является проекцией плоского проективного множества $\mathfrak{E}_k$ класса $< n$. Пусть Σ есть сумма множеств $\mathfrak{E}_k$.

Предложенная теорема верна для $n = 1$. Допустим, что она верна для всех классов $< n$ и докажем, что она тогда верна и для n.

В силу сделанной гипотезы множество Σ есть проективное множество класса ниже n.

С другой стороны, множество S, очевидно, есть проекция Σ. Следовательно, S есть либо (A_n), либо (B_n), либо класса $< n$. Ч. т. д.

Рассмотрим теперь общую часть

$$P = E_1 \cdot E_2 \ldots E_k \ldots$$

счетного числа множеств (A_n) или (B_n).

Прежде всего мы можем предположить, что множества E_k линейные, так как мы видели, что каждое проективное множество можно преобразовать в линейное проективное множество того же класса и рода при помощи преобразования многомерной области в линейную, причем это преобразование областей не зависит от операций, с помощью которых получены проективные множества. Итак, предположим, что все E_k лежат в линейной области $\mathcal{J}_x$.

В силу предшествующего мы можем рассматривать E_k как множество значений функции $f_k(x_k)$, где f_k непрерывна на $\mathcal{J}_{x_k}$, а переменная точка x_k пробегает проективное множество H_k вида (CA_{n-1}).

Установив это, возьмем неограниченную последовательность непрерывных на $\mathcal{J}_t$ функций

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ldots, \; x_k = \varphi_k(t), \ldots$$

таких, что какова бы ни была последовательность чисел $\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_k, \ldots$ в $\mathcal{J}_x$, существует иррациональное t_0, заключенное между 0 и 1, для которого мы имеем

$$\varphi_k(t_0) = \overset{0}{x}_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Сложные функции $f_k[\varphi_k(t)]$ непрерывны на (0, 1) области $\mathcal{J}_t$. Следовательно, множество точек t, для которых удовлетворяются одновременно равенства

$$f_1[\varphi_1(t)] = f_2[\varphi_2(t)] = \ldots = f_k[\varphi_k(t)] = \ldots$$

есть замкнутое на $\mathcal{J}_t$ множество. Обозначим его через T.

Обозначим через θ_k множество всех точек t, для которых $\varphi_k(t)$ принадлежит к H_k. Установим природу θ_k.

С этой целью рассмотрим кривую $x_k = \varphi_k(t)$ в области $\mathcal{J}_{tx_k}$. Линейное множество H_k расположено на оси OX_k. На основании предыдущего параграфа множество точек, лежащих на всех прямых, параллельных оси OT и проведенных через точки H_k, есть плоское множество (CA_{n-1}). Обозначим это множество через Q_k. Рассмотрим дополнение CQ_k к множеству Q_k; это множество (A_{n-1}).

Мы предполагаем, что теорема верна для всех классов ниже n. Отсюда следует, что общая часть CQ_k и кривой $x_k = \varphi(t)$ есть множество (A_{n-1}) или (B_{n-1}), или класса ниже $< n$. Значит, проекция этого множества на ось OT есть (A_{n-1}) или (B_{n-1}), или класса $< n-1$. Но множество θ_k есть, очевидно, дополнение к этой проекции. Значит, θ_k есть (CA_{n-1}) или (B_{n-1}), или класса $< n-1$.

Установив это, вернемся к доказательству предложенной теоремы. Так как мы предположили теорему верной для всех классов ниже n, то общая часть

$$\theta = T \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 \dots \theta_k \dots$$

есть (CA_{n-1}) или (B_{n-1}), или класса $< n-1$.

Если точка t пробегает θ_k, то $\varphi_k(t)$ принадлежит к H_k, значит, $f_k[\varphi_k(t)]$ принадлежит к E_k. И так как t принадлежит к T, то все значения $f_k[\varphi_k(t)]$ равны между собой. Значит, *любая из этих функций* $f_k[\varphi_k(t)]$, например первая, $f_1[\varphi_1(t)]$, принимает на θ значения, принадлежащие P.

С другой стороны, множество P содержится во множестве значений $f_1[\varphi_1(t)]$ на θ. В самом деле, пусть M_0 — некоторая точка из P. Так как M_0 принадлежит к E_k, то существует число x_k^0, принадлежащее к H_k и такое, что точка $f_k(x_k^0)$ совпадает с M_0.

Но в силу свойства функций $\varphi_k(t)$ существует иррациональное t_0 такое, что $\varphi_k(t_0) = x_k^0$ для всякого k. Эта точка t_0 непременно принадлежит к T, так как все значения $f_k[\varphi_k(t_0)]$ равны между собой. Кроме того, t_0 принадлежит каждому из θ_k, так как $\varphi_k(t_0)$ принадлежит к H_k.

Отсюда следует, что t_0 принадлежит к θ, значит, множество P тождественно со множеством значений $f_1[\varphi_1(t)]$ на θ. Так как θ есть проективное множество (CA_{n-1}) или (B_{n-1}), или класса $< n-1$, то это же справедливо для множества точек, расположенных на параллелях к оси OX и проведенных через точки θ. Отсюда следует, что точки кривой $x = f_1[\varphi_1(t)]$, расположенные на этих параллелях, образуют плоское множество Δ вида (CA_{n-1}), или (B_{n-1}), или класса $< n-1$. А так как рассматриваемое множество P есть, очевидно, проекция Δ на ось OX, то мы видим, что P есть (A_n), или (B_n), или класса $< n-1$.

Итак, мы установили ту часть формулированной теоремы, которая касается множеств (A_n).

Так как каждое (CA_n) есть дополнение к некоторому (A_n), и так как мы имеем очевидные формулы

$$C(E_1 + E_2 + \dots) = CE_1 \cdot CE_2 \dots,$$
$$C(E_1 \cdot E_2 \dots) = CE_1 + CE_2 + \dots,$$

то мы видим, что и часть теоремы, относящаяся ко множествам (CA_n), доказана.

Остается рассмотреть лишь множества (B_n). Но по самому определению, каждое множество (B_n) может быть представлено одновременно в двух видах

$$PC\ldots CPE \quad \text{и} \quad CP\ldots CPE.$$

Из предыдущих рассуждений следует, что *сумма и общая часть счетного множества множеств (B_n) может быть представлена в этих двух формах, а потому она либо (B_n), либо класса $< n$*. Ч. т. д.

Мы дополним этот результат следующим замечанием: мы доказали, что сумма и общая часть множеств (B_n) (или класса $< n$) есть также (B_n) (или класса $< n$). Но легко видеть, что *даже сумма двух множеств класса $n-1$ может быть эффективно множеством (B_n)*.

Чтобы убедиться в этом, возьмем множество (A_{n-1}), лежащее на $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ в области $\mathcal{J}_x$; пусть E_1 это множество. Пусть E_2 — множество (CA_{n-1}), лежащее на $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ в $\mathcal{J}_x$. Обозначим через E сумму E_1+E_2.

Я теперь утверждаю, что E есть эффективно множество (B_n), но не класса ниже n. В самом деле, если E класса $< n$, то E есть либо (A_{n-1}), либо (CA_{n-1}). Пусть, например, E есть (A_{n-1}). Но часть E, лежащая на порции $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, есть (CA_{n-1}), что противоречит условию. Значит, E в точности проективное множество класса n [26]. Значит, E в точности (B_n). Ч. т. д.

Итак, *существуют эффективно множества (B_n), которые можно получить при помощи операций суммирования и взятия общей части, отправляясь от проективных множеств класса ниже n*.

Возникает теперь вопрос, можно ли получить всякое (B_n), отправляясь от проективных множеств классов ниже n, при помощи операций суммы и общей части, повторенных счетное множество раз? [27].

Теорема С. Мазуркевича. Обобщение В. Серпинского

Исследования С. Мазуркевича. Мы обязаны С. Мазуркевичу результатом чрезвычайной важности[1]), непосредственно связанным с предыдущими рассмотрениями и касающимся теории аналитических множеств и их дополнений.

Для определенности мы, излагая результат Мазуркевича, ограничимся рассмотрением плоской области $\mathcal{J}_{xy}$.

Пусть H есть множество, измеримое B, лежащее в $\mathcal{J}_{xy}$. Мы скажем, что точка $M_0(x_0, y_0)$ есть *нижняя точка множества* H, если M_0 принадлежит к H и если не существует никакой точки $M(x_0, y)$ из H с ординатой y, меньшей чем y_0.

Установив это определение, легко узнать, какова природа множества всех нижних точек некоторого множества H, измеримого B.

Обозначим через $H^{(i)}$ множество всех *нижних точек* множества H. Очевидно, это множество $H^{(i)}$ можно получить следующим образом. Возьмем прямую $y=\rho$, где ρ — *рациональное* число. Обозначим через H_ρ множество всех точек H, лежащих *ниже* этой прямой. Пусть Δ_ρ есть множество параллелей к оси OY, проходящих через все точки H_ρ. Множество всех точек $\mathcal{J}_{xy}$, принадлежащих к Δ_ρ, есть, очевидно, *аналитическое* множество. Следовательно, то же имеет место и для множества θ_ρ всех точек H, лежащих *выше* прямой $y=\rho$ и принадлежащих к Δ_ρ.

Установив это, заставим ρ пробегать все рациональные числа; сумма θ всех множеств θ_ρ есть, очевидно, аналитическое множество, принадлежащее к H. Отсюда следует, что разность $H-\theta$ есть *аналитическое дополнение*, которое, в частных случаях, может оказаться измеримым B. Но это множество, очевидно, совпадает с рассматриваемым множеством $H^{(i)}$. А так как всякая параллель к оси OY пересекает $H^{(i)}$ не более, чем в одной точке, то мы приходим к следующему результату Мазуркевича:

Множество $H^{(i)}$ всех нижних точек множества H, измеримого B, есть аналитическое дополнение, однозначное относительно оси OX.

---

[1]) См. Mazurkiewicz, Sur une propriété des ensembles CA, Fund. Math., т. X (стр. 172—174).

Прежде чем идти дальше, полезно доказать следующие две леммы, принадлежащие Серпинскому:

Лемма 1. *Сумма $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ счетного множества линейных множеств попарно без общих точек, каждое из которых есть проекция однозначного аналитического дополнения, обладает тем же самым свойством.*

В самом деле, если E_n есть проекция однозначного аналитического дополнения Δ_n, то сумма $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n + \ldots$ есть, очевидно, однозначное аналитическое дополнение, имеющее проекцией заданное множество-сумму $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ Ч. т. д.

Лемма 2. *Общая часть $E_1 \cdot E_2 \ldots E_n \ldots$ счетного множества линейных множеств, каждое из которых есть проекция однозначного аналитического дополнения, также обладает этим свойством.*

Пусть Δ_n есть аналитическое дополнение, однозначное относительно оси OX, проекция которого на эту ось есть E_n.

Если мы преобразуем область $\mathcal{J}_{xy}$ в порцию (0,1) линейной области $\mathcal{J}_t$ при помощи взаимно однозначного и взаимно непрерывного соответствия

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ t &= F(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

то образ λ_n множества Δ_n есть аналитическое дополнение. Легко видеть, что функция $\varphi(t)$ разнозначна на λ_n и что E_n есть множество ее значений на λ_n.

Установив это, рассмотрим бесконечную последовательность непрерывных на $\mathcal{J}_\tau$ функций

$$t_1 = f_1(\tau), \quad t_2 = f_2(\tau), \ \ldots, \quad t_n = f_n(\tau), \ \ldots,$$

обладающих следующим свойством: какова бы ни была последовательность иррациональных чисел $t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0$, заключенных между 0 и 1, существует одно и только одно иррациональное τ_0, заключенное между 0 и 1, для которого $f_n(\tau_0) = t_n^0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Так как функции f_n непрерывны на $\mathcal{J}_\tau$, множество ϑ_n точек τ, для которых $f_n(\tau)$ принадлежит к λ_n, есть аналитическое дополнение. Отсюда следует, что общая часть ϑ всех ϑ_n есть также аналитическое дополнение.

Рассмотрим теперь множество T точек τ, для которых удовлетворены равенства

$$\varphi[f_1(\tau)] = \varphi[f_2(\tau)] = \ldots = \varphi[f_n(\tau)] = \ldots$$

Так как функции $\varphi[f_n(\tau)]$ непрерывны на $\mathcal{J}_\tau$, то легко видеть, что T замкнуто на $\mathcal{J}_\tau$.

Множество $T \cdot \vartheta$ есть, следовательно, аналитическое дополнение. Повторяя рассуждение (стр. 281), мы видим, что E есть множество значений $\varphi[f_k(t)]$ на $\vartheta \cdot T$.

С другой стороны, очевидно, что функция $\varphi[f_k(\tau)]$ разнозначна на $T \cdot \vartheta$.

Обозначим через Λ множество точек области $\mathcal{J}_{x\tau}$, принадлежащих кривой $x = \varphi[f_1(\tau)]$, причем τ принадлежит к $T \cdot \vartheta$. Это множество есть, очевидно, плоское аналитическое дополнение. Но функция $\varphi[f_1(\tau)]$ разнозначна на $T \cdot \vartheta$. Следовательно, множество Λ *однозначно* относительно оси OX, что и доказывает лемму. Ч. т. д.

Перейдем теперь к доказательству основного результата Мазуркевича.

Теорема (Мазуркевич). *Всякое аналитическое множество есть проекция однозначного аналитического дополнения.*

Так как область $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m y}$ может быть преобразована в плоскую область $\mathcal{J}_{xy}$, мы ограничимся рассмотрением *линейных* аналитических множеств.

Пусть E — линейное аналитическое множество, лежащее в области $\mathcal{J}_x$. Мы можем рассматривать E как проекцию элементарного множества $\mathcal{E}$, построенного следующим образом (стр. 193): $\mathcal{E}$ есть общая часть $S_1 \cdot S_2 \ldots S_n \ldots$, где S_n есть сумма прямоугольников Бэра ранга n, попарно без общих точек; проекции прямоугольников Бэра ранга n на ось OY попарно не имеют общих точек и образуют на этой оси *вполне упорядоченное* множество интервалов, причем порядок соответствует положительному направлению оси OY. Кроме того, каждый прямоугольник ранга n содержится в одном и только одном прямоугольнике ранга $n-1$ и содержит счетное множество прямоугольников ранга $n+1$.

Так определенное элементарное множество $\mathcal{E}$ есть множество, измеримое B, и легко видеть, что E есть проекция его нижних точек, что и доказывает теорему Мазуркевича. Ч. т. д.

Сам Мазуркевич ограничился тем, что вывел из своей теоремы лишь следующий результат: *всякое множество E, являющееся разностью двух аналитических множеств, есть проекция однозначного аналитического дополнения.*

Серпинский указал [1]), что применение двух предыдущих лемм позволяет получить следующий более общий результат:

Всякое множество, которое можно получить, отправляясь от аналитических множеств и их дополнений и повторяя счетное множество раз операцию взятия суммы или общей части, есть проекция однозначного аналитического дополнения.

Так как каждое линейное аналитическое дополнение можно рассматривать как проекцию тождественного с ним множества, то можно было бы думать, что рассматриваемое предложение уже доказано. Но следует принять во внимание, что здесь идет речь о сумме в широком смысле, следовательно, ее члены могут иметь попарно общие точки. Между тем, лемма 1 Серпинского доказана лишь для суммы *в узком смысле*.

Чтобы устранить эту трудность, немедленно доказывают, что можно получить те же самые множества, если взять за две основные операции *суммирование в узком смысле* и *взятие общей части*. Это замечание заканчивает доказательство теоремы. Ч. т. д.

Сделаем еще следующее замечание: каждое множество E, которое можно получить таким способом, отправляясь от аналитических множеств и их дополнений, есть, очевидно, множество (B_2). Возникает вопрос, будет ли *всякое* множество (B_2) проекцией однозначного аналитического дополнения и можно ли распространить теорему Мазуркевича на проективные множества высших классов? [[28]].

---

[1]) См. Sierpinsky, Sur les images continues et biunivoques des complémentaires analytiques, Fund. Math., т. XII, стр. 211—213.

Обобщение теоремы о параметрическом изображении проективных множеств. Мы видели, что всякое проективное множество (A_n) можно рассматривать как геометрическое место последовательных положений подвижной точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, координаты которой являются функциями переменного параметра t

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \ \ldots, \quad x_m = f_m(t)$$

непрерывными на области $\mathcal{J}_t$, причем t пробегает проективное множество (CA_{n-1}).

Мы докажем, что *семейство множеств (A_n) не расширится, если за функции f_i принять произвольные функции классификации Бэра и если заставить t пробегать любое проективное множество класса $< n$, лежащее в $\mathcal{J}_t$.*

В самом деле, пусть f_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — любые функции классификации Бэра, определенные на $\mathcal{J}_t$, и H — любое проективное множество класса $< n$, лежащее в $\mathcal{J}_t$.

Рассмотрим в $m+1$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m t}$ множество $\mathcal{E}$ точек $N(x_1, \ldots, x_m, t)$, удовлетворяющих уравнениям

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \ \ldots, \quad x_m = f_m(t).$$

Это множество $\mathcal{E}$ необходимо измеримо B.

Установив это, отметим на оси OT данное множество H и рассмотрим в области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m t}$ множество всех тех точек, для которых координата t принадлежит к H. Пусть V это множество. Выше мы доказали (стр. 278), что V есть проективное множество того же класса и того же рода, как H.

Следовательно, общая часть множеств V и $\mathcal{E}$ есть проективное множество класса $< n$ и, следовательно, его проекция в область $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$ есть проективное множество (A_n) или (B_n), или класса $< n$. Ч. т. д.

Заметим, что мы придем к тому же результату, если множество H есть (A_n) или (B_n).

Вспомнив аналогию между множествами (B_n) и множествами, измеримыми B, естественно поставить вопрос:

Если дано параметрическое изображение

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \ \ldots, \quad x_m = f_m(t)$$

из функций классификации Бэра, причем оно регулярно или полурегулярно на H, где H есть (B_n), будет ли множество, допускающее это параметрическое изображение, непременно (B_n) или класса $< n$? (См. прим. [25].)

Проективные функции. Для определенности, мы ограничимся рассмотрением функций одного независимого переменного.

Введем следующее определение:

Мы скажем, что однозначная, всюду определенная функция $f(x)$ есть *проективная* функция, если множество точек области $\mathcal{J}_{xy}$, лежащих на изображающей кривой $y=f(x)$, есть проективное множество.

Проективные функции $f(x)$ можно классифицировать по классам и родам проективных множеств.

Как только понятие проективной функции введено, возникают важные вопросы относительно параметрического изображения множеств при помощи проективных функций.

Среди этих многочисленных проблем мы ограничимся указанием некоторых: если дана проективная функция $f(x)$, являющаяся плоским аналитическим дополнением, каково множество ее значений на $\mathcal{J}_x$? Известно, что это множество есть (A_2), или (B_2), или проективное множество класса 1, но мы не знаем, можно ли всякое (A_2) представить таким образом.

Больше того, мы не знаем, можно ли всякое аналитическое дополнение, неизмеримое B, представить в этой форме.

Ответ положителен и до некоторой степени банален, если это аналитическое дополнение содержит совершенное множество: этот результат можно получить, отправляясь от предыдущей теоремы Мазуркевича. Но если не делать никакой гипотезы, то ничего не известно.

В заключение мы хотим привлечь внимание математиков к одной проблеме первостепенной важности.

Дана *проективная функция* $f(x)$ *однозначная, всюду определенная и такая, что изображающая ее кривая* L *есть аналитическое дополнение; узнать, содержит ли непременно* L *совершенное множество?* [29].

Чрезвычайная важность этой проблемы вызвана тем, что если ее решение отрицательно, то знаменитая проблема континуума решается *положительно*.

В самом деле, множество L есть сумма несчетного множества конституант, измеримых B и перенумерованных при помощи конечных и трансфинитных чисел второго класса по Кантору

$$L=\mathscr{E}_0+\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\ldots+\mathscr{E}_\omega+\ldots+\mathscr{E}_\alpha+\ldots|\Omega.$$

Так как L не содержит никакого совершенного множества, то каждая его конституанта E есть счетное множество и такова же будет ее проекция E_x на ось OX. Но проекция кривой L на ось OX в точности совпадает с этой осью. Следовательно, мы имеем

$$(-\infty,\ +\infty)=E_0+E_1+\ldots+E_\omega+\ldots+E^\alpha+\ldots|\Omega,$$

что и доказывает, что мощность континуума есть $\aleph_1$.

Проективные решета. Мы теперь обобщим результаты, относящиеся к аналитическим решетам (стр. 180).

Легко показать, что мы не выходим за пределы проективных множеств, производя операцию, которая состоит в том, чтобы брать множество, просеянное при помощи проективного решета.

Теорема. *Всякое множество, просеянное при помощи проективного решета класса n, есть проективное множество (A_{n+1}) или класса $\leqslant n$.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно следовать доказательству, относящемуся к аналитическим решетам (стр. 180). В самом деле, если дано проективное решето C класса n, то множество E, просеянное при помощи C, есть множество значений непрерывной функции $\varphi[f_1(\tau)]$ на $\theta\cdot H$. Но множество θ измеримо B. С другой стороны, мы имеем

$$H=H_1\cdot H_2\ldots H_k\ldots$$

Так как H_k есть результат непрерывного преобразования C, то H_k есть проективное множество класса $\leqslant n$, каково бы ни было k. Следовательно, $\theta\cdot H$ есть также проективное множество класса $\leqslant k$ и, следовательно, E есть (A_{n+1}) или проективное множество класса $\leqslant n$. Ч. т. д.

Обратно, всякое множество (A_{n+1}) можно рассматривать как просеянное при помощи решета (CA_n). Это замечание весьма банально, так как каждое множество E вида (A_{n+1}) есть проекция множества H вида (CA_n). Если мы обозначим через H_k множество (CA_n), лежащее между прямыми $y=\frac{1}{k+1}$ и $y=\frac{1}{k}$, проекция которого на ось OX совпадает с E, то ясно, что E просеяно при помощи суммы $H_1+H_2+\ldots+H_k+\ldots$, а эта сумма есть множество (CA_n). Ч. т. д.

Среди проективных решет наиболее интересны *счетные*: это такие проективные решета C, что каждая прямая, параллельная вертикальной оси, пересекает C не более, чем по счетному множеству точек. К сожалению, по этому вопросу известно очень мало.

Известно, что каждое аналитическое множество можно рассматривать как просеянное при помощи счетного решета, измеримого B. Но неизвестно, можно ли каждое множество (A_2) рассматривать как просеянное при помощи счетного решета (B_2). Неизвестно даже, можно ли каждое счетное решето (B_2) разложить на счетное множество *однозначных* множеств (B_2).

С этими рассмотрениями можно связать понятие прямолинейного решета. Счетное решето C называется *прямолинейным*, если оно составлено из счетного множества множеств, лежащих на параллелях к оси OX. Было бы чрезвычайно интересно узнать, каковы линейные множества (A_2), которые могут быть получены при помощи прямолинейных решет (B_2).

Я должен отметить одну работу Е. А. Селивановского, относящуюся к этому вопросу. Этот молодой автор рассматривал семейство множеств, которое можно получить, отправляясь от множеств, измеримых B, при помощи двух операций: *прямолинейного решета* и *взятия дополнения* повторенных неограниченно. Эти множества носят название множеств (C) и разбиваются на бесконечное множество классов, перенумерованных при помощи всех конечных чисел и всех трансфинитных чисел второго класса по Кантору [30].

Селивановский доказал, что все эти множества измеримы и имеют определенную категорию, но связь этого семейства множеств с семейством проективных множеств остается неизвестной [1]).

Отделимость. Одна из наиболее важных проблем теории проективных множеств, ожидающая еще своего решения, есть проблема их *отделимости.*

Известно, что любые два аналитических множества без общих точек всегда отделимы B. Было бы очень важно доказать, что любые два множества (A_n) без общей точки всегда отделимы (B_n).

Точно так же мы знаем, что если удалить их общую часть из двух аналитических множеств, то оставшиеся части отделимы при помощи двух аналитических дополнений. Естественно возникает вопрос, сохранится ли этот принцип, если заменить аналитические множества через (A_n), а их дополнения через (CA_n). Эта проблема, несмотря на свою трудность, заслуживает того, чтобы привлечь внимание математиков.

Кроме того, важно было бы узнать, существуют ли два множества (CA_n), которые неотделимы (B_n) [[32]].

Существование проективных множеств всякого класса и всякого рода. Универсальные множества

Теперь пора восполнить пробел, доказав существование проективных множеств всякого класса и рода. Мы отложили это доказательство к концу теории проективных множеств для того, чтобы некоторые предварительные очень полезные предложения были уже доказаны [2]).

---

[1]) См. заметку Е. А. Селивановского, Sur une classe d'ensembles définis par une infinité dénombrable de conditions (Comptes Rendus Acad. Sc., 30 мая 1927 г.).

Исправляя корректуры, я добавлю, что исследования, относящиеся к этой проблеме, были предприняты недавно двумя учениками Г. М. Фихтенгольца Канторовичем и Ливенсоном; они показали, что множества (C) суть *проективные множества второго класса.* См. их заметки в Comptes Rendus Acad. Sc. Канторович и Ливенсон, Sur les ensembles projectifs de deuxième classe, 30 декабря 1929 г.; Kantorovitch et Livenson, Sur les δ_s-fonctions de M. Hausdorff (10 февраля 1930 г.); Sur les ensembles projectifs de M. Lusin (12 мая 1930 г.) [[31]].

[2]) См. также мою заметку «Les propriétés des ensembles projectifs» (Comptes Rendus Acad. Sc. 15 июня 1925 г.).

Сделаем сначала одно очень простое замечание: чтобы доказать существование множеств (B_n), достаточно доказать существование множеств (A_{n-1}) и (CA_{n-1}). В самом деле, мы видели (стр. 282), что сумма двух множеств, из которых одно (A_{n-1}), а другое (CA_{n-1}), расположенных в двух неперекрывающихся порциях области $\mathcal{J}_x$, необходимо имеет вид (B_n). С другой стороны, если E есть (A_n), то его дополнение CE есть (CA_n). Итак, все сводится к доказательству существования проективных множеств (A_n).

Метод, позволяющий нам доказать это существование, опирается на построение *универсальных* плоских множеств различных типов.

Мы называем *универсальным множеством типа* (A_n) всякое плоское проективное множество U вида (A_n) или (B_n) или класса $< n$, обладающее следующим свойством: всякое линейное множество (A_n) или (B_n), или класса $< n$ можно получить, пересекая U подходяще выбранной параллелью к оси OY.

Легко видеть, что каждое универсальное множество U типа (A_n) само является эффективным примером множества (A_n). В самом деле, пересечем U диагональю $y = x$. Пусть e есть множество точек U, лежащих на этой диагонали, и пусть e' есть проекция e на ось OY.

Прежде всего дополнение Ce' заведомо не может быть получено, если пересекать U параллелями к оси OY. Этот важный факт мы уже видели на стр. 130.

Отсюда следует, что линейное множество e есть эффективно множество (A_n). В самом деле, в противном случае это множество есть *либо* (B_n), *либо* класса $< n$. Следовательно, линейные множества e' и Ce' одной и той же природы, что невозможно, так как в этом случае Ce' можно было бы получить, пересекая U параллелью к оси OY.

Итак, мы уже имеем пример линейного множества (A_n): это множество e. Но можно утверждать нечто бóльшее: само множество U есть множество (A_n). В самом деле, если бы U было (B_n) или класса $< n$, то его часть e, лежащая на диагонали $y = x$, была бы той же природы.

Итак, все сводится к построению универсальных множеств типа (A_n), каково бы ни было целое положительное n.

Прежде всего на стр. 146 мы построили *универсальное аналитическое* множество U. Его дополнение CU есть, очевидно, универсальное аналитическое дополнение, так как каждое линейное аналитическое дополнение (и, в частности, каждое множество, измеримое B) можно получить, пересекая CU параллелью к оси OY.

Установив это, применим метод *простой индукции*. Итак, допустим, что мы построили множество U_{n-1}, лежащее в плоскости XOT и являющееся универсальным множеством типа (A_{n-1}). Его дополнение CU_{n-1} есть, очевидно, универсальное множество типа (CA_{n-1}).

Возьмем функцию

$$z = \varphi(x, \tau)$$

класса 2 по классификации Бэра, определенную всюду на $\mathcal{J}_{x\tau}$ и такую, что всевозможные функции $f(x)$ класса 1 классификации Бэра можно получить, выбирая подходящим образом значение τ_0 параметра τ

$$f(x) \equiv \varphi(x, \tau_0).$$

Такие функции φ мы строили на стр. 147.

Установив это, преобразуем множество U_{n-1} и функцию φ во множество V_{n-1} и функцию ψ таким образом, чтобы получить новую пару (V_{n-1}, ψ), в некотором роде *дважды универсальную*.

С этой целью возьмем две функции

$$t = g(y) \text{ и } \tau = h(y),$$

непрерывные на $\mathcal{J}_y$ и обладающие следующим свойством: каковы бы ни были два иррациональных числа t_0 и τ_0, найдется такое иррациональное y_0, что $t_0 = g(y_0)$ и $\tau_0 = h(y_0)$.

Чтобы получить множество V_{n-1}, возьмем преобразование области $\mathcal{J}_{tx}$ в новую область $\mathcal{J}_{yx}$, данное формулами

$$x = x, \ t = g(y).$$

Множество V_{n-1} есть, по определению, образ множества U_{n-1}. Ясно, что V_{n-1} есть плоское проективное (A_{n-1}).

С другой стороны, преобразуем функцию $\varphi(x, \tau)$ в новую функцию $\psi(x, y)$ при помощи подстановки $\tau = h(y)$:

$$\psi(x, y) = \varphi[x, h(y)].$$

Множество V_{n-1} и функция ψ образуют *дважды универсальную* пару, так как, выбирая подходящим образом число y_0, мы получаем одновременно произвольное линейное множество (A_{n-1}), или (B_{n-1}), или класса $< n-1$, как результат пересечения V_{n-1} прямой $y = y_0$, и любую функцию $f(x)$ класса 1 при помощи равенства $f(x) = \psi(x, y_0)$.

Установив это, рассмотрим трехмерную область $\mathcal{J}_{xyz}$. Пусть S есть поверхность, определенная уравнением

$$z = \psi(x, y).$$

Возьмем на горизонтальной плоскости XOY множество CV_{n-1} и обозначим через $\mathfrak{E}$ множество тех точек S, проекции которых на плоскость XOY принадлежат к CV_{n-1}. Ясно, что $\mathfrak{E}$ есть (CA_{n-1}), или (B_{n-1}), или класса $< n-1$. Следовательно, проекция $\mathfrak{E}$ на плоскость ZOY есть проективное множество (A_n), или (B_n), или класса $< n$.

Я теперь утверждаю, что *так определенное множество E есть универсальное множество типа* (A_n).

В самом деле, мы знаем, что всякое линейное множество e вида (A_n), или (B_n), или класса $< n$ можно рассматривать, как множество значений некоторой функции $f(x)$, непрерывной на $\mathcal{J}_x$, когда x пробегает линейное множество H вида (CA_{n-1}), или (B_{n-1}), или класса $< n-1$.

Но, выбирая соответствующим образом y_0, мы получим множество H, пересекая CV_{n-1} прямой $y = y_0$, и функцию $f(x)$, подставляя $y = y_0$ в $\psi(x, y)$.

Отсюда можно заключить, что наперед заданное множество e рода (A_n) или (B_n) или класса $< n$ можно получить, пересекая E прямой $y = y_0$, а это и доказывает, что E есть универсальное множество типа (A_n). Ч. т. д.

Резольвенты

Резольвенты. Мы скажем, что некоторая проблема P теории функции *поставлена в резольвенту*, если мы можем назвать множество *точек* E такое, что проблема P решается положительно, каждый раз как можно назвать точку из E, и решается отрицательно, если можно доказать, что E пусто [1]). Само множество точек E, от которого зависит окончательное решение предложенной проблемы P, называется *резольвентой* проблемы P.

Среди проблем теории функций, решение которых, повидимому, представляет трансцендентные трудности, большинство может быть поставлено в резольвенту, причем важно заметить, что все эти резольвенты оказываются *проективными* множествами. Среди этих проблем наиболее интересны следующие: эффективное *вполне упорядочивание континуума* и отыскание аналитического обозначения, лишенного двусмысленности, для всех трансфинитных чисел второго класса по Кантору. Этой последней проблемой мы обязаны Борелю; мы сейчас объясним, в чем ее смысл.

Известно, что среди трансфинитных чисел второго класса по Кантору «маленькие» трансфинитные числа могут быть написаны при помощи буквы ω. Это значит, что существует много трансфинитных чисел, в некотором смысле *близких* к ω, которые могут быть написаны в виде многочленов или показательных функций от ω. Все эти трансфинитные числа вполне определены. Но таким способом нельзя определить *все* трансфинитные числа второго класса. В самом деле, какие бы определения мы ни дали (определения, содержащие конечное число символов), найдутся трансфинитные числа, которые не подпадут под эти определения, но могут быть определены другими символами в конечном числе и так до бесконечности [2]).

Итак, в настоящем состоянии науки мы не имеем никакого алгорифма, позволяющего написать все трансфинитные числа второго класса. Тем не менее существует алгорифм, позволяющий написать все действительные числа: достаточно напомнить разложение в бесконечную десятичную дробь.

Вышеуказанная проблема Бореля состоит именно в том, чтобы найти алгорифм, составленный из счетного множества

---

[1]) О методе резольвент см. мою заметку «Sur le problème de M. Emile Borel et la méthode des résolvantes» (Comptes Rendus Acad. Sc., 17 августа 1925 г.) и цитированный мемуар «Sur les ensembles analytiques» (Fund. Math., т. X, стр. 91).

[2]) См. Borel, La philosophie mathématique et e'infini, Revue du Mois, août, 1912 г.

символов и позволяющий написать все трансфинитные числа второго класса.

Проблема Э. Бореля была бы решена, если бы мы умели перенумеровать все действительные числа при помощи совокупности трансфинитных чисел второго класса или, по крайней мере, назвать часть континуума, перенумерованную этим способом. Но в первом случае сама проблема континуума была бы полностью решена, а во втором случае мы бы имели решение проблемы о сравнении двух мощностей: *мощности континуума и мощности* $\aleph_1$ [1]).

Вернемся теперь к резольвентам. Самое введение понятия резольвенты тесно связано с идеями Э. Бореля. В своем сообщении IV Математическому конгрессу (Рим, апрель 1908 г.) Борель говорит: «Чтобы дать понять мою точку зрения, я укажу проблему, кажущуюся мне одной из наиболее важных в арифметической теории континуума: Можно ли определить множество E такое, что нельзя назвать ни одного индивидуального элемента этого множества E, т. е. без двусмысленности отличить его от всех остальных элементов E» [2]).

Цель дальнейших рассмотрений состоит в том, чтобы указать проективные множества, образованные из точек сегмента (0, 1) и которые я рассматриваю как решение только что цитированной проблемы Бореля.

Эти проективные множества являются резольвентами некоторых проблем, решение которых в абсолютном смысле, по моему мнению, выходит за пределы классической теории множеств.

Среди многочисленных проблем теории функций я ограничусь рассмотрением только двух и построю резольвенты этих проблем.

Проблема I. *Узнать, не будут ли все аналитические дополнения либо счетны, либо иметь мощность континуума.*

Интерес этой проблемы вызывается тем, что если допускать существование всех трансфинитных чисел второго

---

[1]) См. письмо Лебега: «Cinq lettres sur la théorie des ensembles» (Bulletin de la Soc. Math. de France, décembre 1904 г.).

[2]) См. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, 3 éd. 1928, стр. 162.

класса, то можно безукоризненно доказать, что всякое несчетное аналитическое дополнение, не содержащее совершенного множества, необходимо является соединением несчетного множества счетных множеств попарно без общих точек, перенумерованных вполне точно, при помощи всех трансфинитных чисел второго класса. Следовательно, если этот логически возможный случай практически реален, то можно будет утверждать, что существование всех трансфинитных чисел второго класса есть факт как бы экспериментального характера.

Резольвента E *этой проблемы есть проективное множество класса не выше* 3. Если можно назвать точку из E, то такое необыкновенное аналитическое дополнение существует, *и обратно*.

Перейдем теперь к построению этой резольвенты.

Возьмем трехмерную область $\mathcal{J}_{xyz}$ и рассмотрим в плоскости XOZ универсальное *аналитическое* множество U, т. е. такое, что всевозможные линейные аналитические множества можно получить, пересекая U параллелями к оси OZ.

С другой стороны, возьмем в плоскости YOZ множество U' такое, что всевозможные линейные *совершенные* множества *и только их* можно получить, пересекая U' параллелями к оси OZ. Такое множество U' построить очень легко [88].

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество точек области $\mathcal{J}_{xyz}$, проекции которых на плоскость YOZ принадлежат к U. Аналогично, пусть $\mathcal{E}'$ есть множество точек $\mathcal{J}_{xyz}$, проекции которых на плоскость YOZ принадлежат U'.

Ясно, что $\mathcal{E}$ есть аналитическое множество и что $\mathcal{E}'$ есть либо (A_2), либо (B_2), либо класса 1. Значит, общая часть $\mathcal{E}\cdot\mathcal{E}'$ есть либо множество (A_2), либо (B_2), либо класс 1.

Произведем над $\mathcal{E}\cdot\mathcal{E}'$ операции, указанные в следующей формуле:

$$E_1 = PCP(\mathcal{E}\cdot\mathcal{E}'),$$

где мы проектируем $\mathcal{E}\cdot\mathcal{E}'$ на XOY, затем берем дополнение к этой проекции, и, наконец, проектируем это дополнение на OX.

Ясно, что *так полученное проективное множество* E_1 *есть либо* (A_3), *либо* (B_3), *либо класса* $\leqslant 2$.

Установив это, возьмем в плоскости YOZ множество U'', *измеримое* B, такое, что всевозможные счетные линейные множества можно получить, пересекая U'' параллелями к оси OZ. Чтобы получить такое U'', достаточно взять бесконечную последовательность *непрерывных* функций $f_1(y), f_2(y), \ldots, f_n(y), \ldots$ таких, что, какова бы ни была система иррациональных чисел $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, \ldots$, существует число y_0, для которого при всяком n имеем $z_n^0 = f_n(y_0)$. Если мы проведем в плоскости YOZ все эти кривые $z = f_n(y)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, то их соединение и есть, очевидно, искомое множество U''.

Заметив это, обозначим через $\mathscr{E}''$ множество точек $\mathscr{I}_{xyz}$, проекции которых на плоскость YOZ принадлежат к U''. Ясно, что $\mathscr{E}''$ измеримо B и что сумма $\mathscr{E} + \mathscr{E}''$ есть *аналитическое* множество.

Произведем над $\mathscr{E} + \mathscr{E}''$ операции, указанные формулой

$$E_2 = PCPC(\mathscr{E} + \mathscr{E}''),$$

где дополнение берется в области $\mathscr{I}_{xyz}$, затем мы проектируем на XOY, затем берем дополнение и, наконец, проектируем на OX.

Легко видеть, что *так полученное проективное множество E_2 есть либо (A_3), либо (B_3), либо класса $\leqslant 2$.*

Отсюда следует, что множество-сумма $E_1 + E_2$ есть проективное множество класса $\leqslant 3$. Значит, если мы обозначим через E дополнение к этой сумме, то *множество E есть также проективное и класса* $\leqslant 3$.

Я теперь утверждаю, что *множество E есть резольвента поставленной проблемы.* Это значит, что *если бы мы умели указать точку во множестве E, то мы бы получили несчетное аналитическое дополнение,* без совершенной части; а если бы удалось доказать, *что E пусто, то было бы доказано, что таких аналитических дополнений не существует.*

В самом деле, если мы расшифруем смысл несколько сложных построений двух линейных проективных множеств E_1 и E_2, то мы найдем, что E_1 есть множество тех точек x, в которых параллели к оси OZ пересекают универсальное аналитическое множество U по *обыкновенным* аналитическим множествам, дополнения к которым содержат, каждое, по совершенному множеству; точно так же E_2 есть множество тех точек x, для которых соответствующие аналитические множества имеют счетные (или конечные) дополнения: это также *обыкновенные* дополнения.

Если мы удалим из оси OX все точки множеств E_1 и E_2, мы, разумеется, получим точки x, которые соответствуют *необыкновенным* аналитическим дополнениям.

Итак, в конечном итоге мы здесь имеем лишь чисто логическую трудность, хорошо запрятанную под *квазигеометрической* внешностью.

Проблема II. *Узнать, существует ли функция $f(x)$, всюду определенная и такая, что изображающая ее кривая $y=f(x)$ есть аналитическое дополнение без совершенной части.*

Важность этой проблемы объясняется тем, что в случае положительного ответа мощность континуума окажется равной $\aleph_1$ (стр. 288).

Кроме того, *эта кривая $y=f(x)$ не может быть измерима в смысле Лебега.* В самом деле, если бы эта кривая была измерима в смысле Лебега, то на оси OX существовало бы совершенное множество P, на котором $f(x)$ была бы непрерывна. Это значит, что рассматриваемая кривая $y=f(x)$ содержит совершенное множество, что противоречит сделанной гипотезе.

Чтобы не утомлять читателя, повторяя одни и те же операции, мы просто укажем путь построения резольвенты предложенной проблемы.

Прежде всего мы возьмем в области $\mathcal{J}_{xyz}$ аналитическое *универсальное множество U трех измерений*, такое, что всевозможные плоские аналитические множества получаются при пересечении U плоскостями, параллельными XOY.

Обозначим через H_1 множество точек прямых, параллельных оси OY и не пересекающих дополнение CU к U. Точно так же пусть H_2 есть множество точек прямых, параллельных оси OY, каждая из которых пересекает CU не менее двух раз. Пусть E_1 и E_2 соответственно проекции H_1 и H_2 на ось OZ'. Так как H_1 есть либо (CA_2), либо (B_2), либо класса < 2, а H_2 либо (A_2), либо (B_2), либо класса < 2, то E есть *проективное множество класса* $\leqslant 3$, E_2 — *проективное множество класса* $\leqslant 2$.

Обозначим через E_3 множество таких точек ζ оси OZ, что каждая плоскость $z=\zeta$ пересекает U по аналитическому множеству, дополнение к которому *либо* счетно (или конечно), *либо* имеет мощность континуума. Чтобы получить множество E_3, достаточно преобразовать взаимно однозначно и взаимно непрерывно область $\mathcal{J}_{xy}$ в область $\mathcal{J}_x$ при помощи уравнений

$$\left.\begin{aligned} x=\varphi(t), \quad & y=\psi(t), \\ & t=F(x, y), \\ & z=z. \end{aligned}\right\}$$

Образ U' множества U при этом преобразовании есть плоское аналитическое множество и плоскости, параллельные XOY, преобразуются в прямые, параллельные оси OT.

Отсюда следует, что дополнение к множеству E_3 тождественно с резольвентой предшествующей проблемы. Значит, E_3 есть проективное множество класса $\leqslant 3$.

Если удалить из оси OZ множества E_1, E_2 и E_3, то множество E оставшихся точек есть, очевидно, *проективное множество класса* $\leqslant 3$. Это проективное множество E и есть *резольвента* поставленной проблемы.

Мы видим, что лицо, которое сумело бы назвать точку во множестве E, сумело бы перенумеровать все точки оси OX при помощи всех трансфинитных чисел второго класса.

Анализ мемуара Лебега «Sur les fonctions représentables analytiquement»

На следующих страницах мы укажем некоторые пункты этого мемуара[1]), тесно связанные с предметом наших рассмотрений. В то же время мы хотели бы привлечь внимание аналистов к одному методу, употребленному Лебегом для построения точечных множеств.

Природа этого метода очень сложна и несколько загадочна. С одной стороны, он совершенно избегает рассуждения Цермело. С другой стороны, базируется на совокупности

[1]) Journal de Mathématique, 1905, стр. 139—216.

всех трансфинитных чисел второго класса. Важно заметить, что самый способ пользования этой совокупностью существенно отличается от способов, употребляемых во всех известных рассуждениях.

В самом деле, есть много точечных множеств, которые могут быть определены при помощи совокупности трансфинитных чисел второго класса: таков, например, случай аналитических дополнений (стр. 197), а также проективных множеств. Но мы видели, что каждый раз, как эта совокупность появляется, ее можно исключить при помощи *отрицательных* определений. Например, любое решето C определяет аналитическое дополнение *положительным* образом: это множество точек, где перпендикуляры пересекают решето C по вполне упорядоченным множествам, которым, вообще говоря, соответствуют все более и более высокие трансфинитные числа. Итак, *все* трансфинитные числа второго класса эффективно вошли в это определение. Тем не менее, если мы хотим избежать понятия трансфинитного, достаточно определить аналитическое дополнение, как множество точек, которые не принадлежат данному аналитическому множеству. Ясно, что здесь совокупность трансфинитных чисел заменена *отрицательной* операцией: взятием дополнения к уже определенному множеству.

Но употребление совокупности трансфинитных чисел в методе Лебега совершенно другое. Лебег пользуется трансфинитной последовательностью действительных чисел, определенных не одновременно, а *последовательно, таким образом, что определение каждого из этих чисел существенно зависит от предыдущих численных определений.*

Этот способ пользоваться совокупностью трансфинитных чисел делает чрезвычайно затруднительным исключение этой совокупности при помощи отрицательных определений. Может случиться, что такое исключение является даже абсолютно невозможным.

Дескриптивный метод Лебега для определения множеств конечных классов. Важным пунктом мемуара Лебега является способ эффективно получить все функции конечных классов классификации Бэра при помощи функций многих переменных непрерывных по каждому из них.

Лебег доказывает следующую теорему, касающуюся этих функций (стр. 201, строка 10):

«XX. *Функция от n переменных, непрерывная по каждому из них, будет класса не выше* $n-1$».

Из этой теоремы следует, что если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть такая функция, то функция $f(x, x, \ldots, x)$, которую мы получим, полагая

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x,$$

есть функция класса не выше $n-1$.

Установив это, цитируем один отрывок из Лебега (стр. 202, строка 1):

«Правда, можно спросить себя, возможно ли, чтобы найденный для класса верхний предел был фактически достигнут. Ответ положителен; в самом деле, мы докажем, что

«XXI. *Если $f(t)$ есть функция класса n, то существует функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, непрерывная по каждому из своих $n+1$ переменных и такая, что $f(t)$ тождественна с $\varphi(t, t, \ldots, t)$*».

Рассмотрения Лебега относятся к функциям. Если мы применим их ко множествам, то вот что мы получим:

Если $\mathfrak{E}$ есть множество точек, лежащее в $n+1$-мерной области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}}$ и такое, что, какова бы ни была точка M этой области, существует фигура, составленная из $n+1$ прямолинейных интервалов, параллельных осям OX_1, $OX_2, \ldots, OX_{n+1}$ и проходящих через точку M[1]), причем эта фигура либо целиком принадлежит к $\mathfrak{E}$, либо не имеет с $\mathfrak{E}$ ни одной общей точки, — тогда линейное множество E, которое получается при разрезании $\mathfrak{E}$ прямой $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, есть множество *класса не выше n и каждое множество конечного класса n может быть получено этим способом.*

Итак, метод Лебега позволяет получить все множества *конечных* классов *дескриптивным* путем, не употребляя никакого оперативного процесса.

Было бы желательно распространить метод Лебега на множества *трансфинитных* классов. Но следует заметить, что невозможно *непосредственно* обобщить метод Лебега. В са-

---

[1]) Точка M есть внутренняя *в узком смысле* для каждого из этих интервалов.

мом деле, для этого пришлось бы рассматривать функции счетного множества переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, непрерывных по каждому из них. Но если определять функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ от счетного множества переменных, как *соответствие* между числом y и бесконечной последовательностью $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, то можно тотчас же придти к следующему отрицательному результату: *можно определить функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, непрерывную по каждому из переменных и такую, что, полагая $x = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \ldots$, мы получим совершенно произвольную функцию $f(x)$ переменного x.*

Этот факт показывает нам, что для обобщения результата Лебега надо идти другим путем.

Метод Лебега для доказательства существования функций всех классов. Перейдем теперь к той части мемуара Лебега, где он доказывает существование функций всех классов и функции, которая не допускает никакого аналитического изображения.

Пусть α — любое число, конечное или трансфинитное второго класса. Требуется определить функцию $f_\alpha(t, x)$ двух действительных переменных t и x, входящую в классификацию Бэра и такую, что каждую заранее данную функцию $F(x)$ класса α можно заведомо получить, выбрав подходящим образом значение t_0 параметра t:

$$f_\alpha(t_0, x) \equiv F(x).$$

Чтобы получить такую функцию $f_\alpha(t, x)$, делаются следующие рассмотрения[1]):

Каждая функция $f(x)$ класса $\leqslant 1$ классификации Бэра есть предел последовательности полиномов

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x),$$

где можно предполагать, что полином $P_n(x)$ имеет степень $\leqslant n$. Обозначим через $a_k^{(n)}$ коэффициенты полинома $P_n(x)$,

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

---

[1]) Я позволяю себе слегка изменить метод Лебега в его технической части, чтобы осветить основные принципы.

С другой стороны, рассмотрим счетное множество функций $\varphi_k^{(n)}(t)$, определенных на порции (0,1) области $\mathcal{J}_t$, непрерывных в каждой точке этой порции и обладающих следующим свойством: какова бы ни была система чисел $a_k^{(n)}$ найдется такое иррациональное t_0 между 0 и 1, что $\varphi_k^{(n)}(t_0) = a_k^{(n)}$, каковы бы ни были n и k.

Эти функции $\varphi_k^{(n)}(t)$ определяют то, что Лебег называет «кривой, заполняющей целую область в пространстве счетного числа измерений» (стр. 211, примечание).

Если мы в полиномах $P_n(x)$ заменим коэффициенты $a_k^{(n)}$ соответствующими функциями $\varphi_k^{(n)}(t)$, мы получим функцию $\psi_n(t, x)$ двух переменных t и x, непрерывную по совокупности этих переменных и совпадающую, очевидно, с заранее заданным полиномом относительно x степени n, когда значение t_0 параметра t выбрано надлежащим образом.

Установив это, вернемся к данному трансфинитному числу α. Чрезвычайно важно заметить, что Лебег предполагает это число α *не только названным*, но данным в некотором смысле *эффективно*, именно так, чтобы вместе с ним задан был пересчет $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ всех трансфинитных чисел, которые предшествуют α. Известно, что в теории трансфинитных чисел смысл символа

$$\alpha^\beta,$$

где α и β два трансфинитных числа, определяется по индукции. Лебег *выводит из простой бесконечной последовательности* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, *образованной из всех трансфинитных чисел, предшествующих* α, *новую вполне определенную последовательность, также простую бесконечную*, $\beta_1, \beta_2, \ldots$, составленную из всех трансфинитных чисел, предшествующих ω^α.

В этом заключается основной пункт, так как этот факт позволяет построить множество *точек* F, линейное, замкнутое и вполне упорядоченное в положительном направлении прямой, содержащей F, причем ему соответствует трансфинитное число ω^α.

Главное свойство числа ω^α заключается в том, что *если мы рассмотрим последовательность производных множеств для F*

$$F,\ F',\ F'',\ \ldots,\ F^{(\omega)},\ \ldots,\ F^{(\gamma)},\ \ldots,\ |\,F^{(\alpha)},$$

то производное множество $F^{(\alpha)}$ состоит из одной и только одной точки x, следовательно, дальнейшие производные будут пусты.

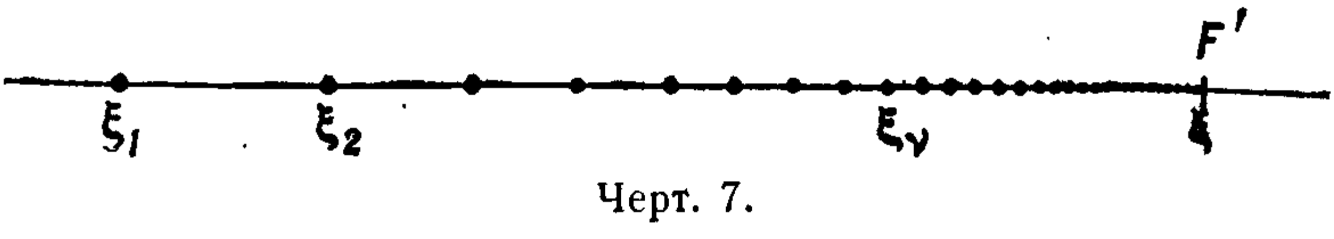
Заметив это, установим взаимно однозначное соответствие между *изолированными* точками F и всеми непрерывными функциями $\psi_n(t, x)$. Так как мы умеем перенумеровать все точки F при помощи целых чисел, то мы можем эффективно получить это соответствие.

Установив это, будем действовать следующим образом: прежде всего каждой изолированной точке ξ первого производного множества F' мы приведем в соответствие вполне определенную функцию переменных t и x класса $\leqslant 1$, получаемую, если взять предел последовательности функций $\psi_n(t, x)$, соответствующих изолированным точкам $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ из F, стремящимся к рассматриваемой точке ξ из F.

Допустим, что каждой изолированной точке каждого из производных множеств $F^{(\beta)}$, предшествующих множеству $F^{(\gamma)}$, приведена в соответствие вполне определенная функция переменных t и x класса $\leqslant \beta$ и установим аналогичное соответствие для изолированных точек самого множества $F^{(\gamma)}$.

Следует различать два случая.

В первом случае число γ первого рода $\gamma = \gamma^* + 1$. В этом случае мы приводим в соответствие каждой изолированной точке ξ из $F^{(\gamma)}$ вполне определенную функцию пере-

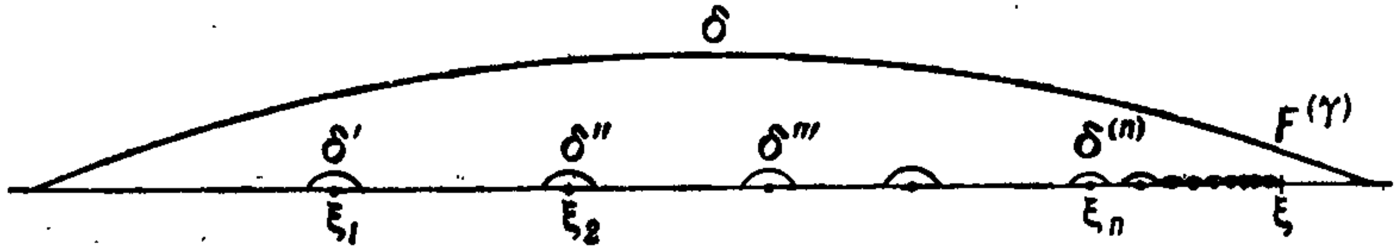


Черт. 7.

менных t и x класса $\leqslant \gamma$, получаемую, если взять предел последовательности функций, соответствующих изолированным точкам $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu, \ldots$ из $F^{(\gamma^*)}$, стремящихся к рассматриваемой точке ξ из $F^{(\gamma)}$.

Во втором случае число γ второго рода. В этом случае мы начнем с того, что заключим все изолированные точки ξ из $F^{(\gamma)}$ в последовательность интервалов δ неперекрывающихся и таких, что каждый интервал δ содержит одну и только одну изолированную точку ξ из $F^{(\gamma)}$.

Так как мы имеем вполне определенную нумерацию для точек множества F при помощи целых чисел, то мы можем определить для каждой изолированной точки ξ из $F^{(\gamma)}$ последовательность точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu, \ldots$, лежащих в соответствующем интервале δ, и таких, что точка ξ_n есть изолированная точка производного множества $F(\beta_n)$, где последовательность $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n < \ldots$ стремится к γ. Точке ξ мы приведем в соответствие вполне определенную функцию переменных t и x, являющуюся пределом функций, соответствующих точкам $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$



Черт. 8.

Очевидно, что, действуя дальше таким же образом, мы в конце концов придем к единственной точке из $F^{(\alpha)}$ и мы приведем ей в соответствие вполне определенную функцию класса $\leqslant \alpha$; *это и будет искомая функция* $f_\alpha(t, x)$.

Чтобы увидеть это, достаточно доказать, что, выбирая надлежащим образом значение t_0 параметра t, мы получим для изолированных точек производного множества $F^{(\gamma)}$ *произвольно данные функции класса* $\leqslant \gamma$ *переменного* x, *каково бы ни было* γ.

С этой целью заметим, что это верно для $\gamma = 1$, так как функции $\psi_n(t, x)$ представляют собой произвольные полиномы относительно x степени n, если только удачно выбрать параметр t.

Случай, когда γ первого рода, $\gamma = \gamma^* + 1$ не представляет никаких трудностей. В самом деле, по гипотезе, можно выбрать параметр t так, чтобы функции, соответствующие изолированным точкам производного $F^{(\gamma^*)}$, обратились в произвольные функции переменного x класса $\leqslant \gamma^*$. В этих условиях рассматриваемый случай тождественен со случаем $\gamma = 1$.

Случай, когда γ второго рода, несколько более сложен. Чтобы устранить трудности, мы определим в каждом интервале δ, содержащем изолированную точку ξ из $F^{(\gamma)}$, последовательность интервалов δ', δ'', ..., $\delta^{(n)}$, ... попарно без общих точек и содержащих, соответственно, внутри (в узком смысле) точки ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ... В этих условиях мы, очевидно, можем выбрать значение t так, чтобы точкам ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n... отвечали заранее данные функции класса соответственно β_1, β_2, ..., β_n, ..., и так для всех изолированных точек ξ из $F^{(\gamma)}$. Из этого немедленно следует, что изолированным точкам ξ из $F^{(\gamma)}$ соответствуют заранее данные функции класса $\leqslant \gamma$.

Итак, *процесс Лебега приводит нас к единственной функции, которую мы обозначим через $f_\alpha(t, x)$ и которая отвечает единственной точке производного множества $F^{(\alpha)}$. Предыдущее рассуждение показывает, что, выбирая надлежащим образом значение параметра t, мы получаем произвольно данную функцию класса $\leqslant \alpha$.*

Представляется еще одна трудность, которую важно устранить. Функция $f_\alpha(t, x)$ не всюду определена, ибо для некоторых значений t пределы, которыми мы пользовались, могут не существовать. Чтобы преодолеть эту трудность, мы просто заменим операцию lim (переход к пределу) через операцию $\overline{\lim}$ (верхний предел). Так как операция lim есть частный случай операции $\overline{\lim}$, мы заключаем, что ни один из случаев перехода к пределу (когда он возможен) не будет потерян. Но в случае, когда переход к пределу невозможен по причине наличия расходящихся последовательностей функций, операция $\overline{\lim}$, заключающаяся во взятии верхнего предела, дает нам всегда вполне определенный результат. Мы видим, что таким образом мы приходим к функции $f_\alpha(t, x)$, *всюду определенной на* $(-\infty < x < +\infty,\ 0 < t < 1)$.

Покажем, что *функция $f_\alpha(t, x)$ входит в классификацию Бэра.* Это очевидно для функций $\psi_n(t, x)$, так как они непрерывны по совокупности переменных. А так как операция $\overline{\lim}$, произведенная над функциями классификации Бэра, всегда приводит к функциям этой классификации, то мы заключаем, что функции, соответствующие изолированным точкам производных множеств $F^{(\gamma)}$, все принадлежат классификации Бэра. В частности, и $f_\alpha(t, x)$ входит в эту классификацию.

Отсюда мы заключаем, что функция переменного x

$$f_\alpha(x, x)$$

входит в классификацию Бэра и ее класс меньше или равен классу $f_\alpha(t, x)$ [1]).

Мы докажем, что *класс функции* $f_\alpha(x, x)$ *не может быть меньше* α.

В самом деле, допустим, что класс $f_\alpha(x, x)$ будет $< \alpha$; пусть β этот класс. Функция $\varphi_n(x)$, определенная равенством

$$\varphi_n(x) = e^{-nf_\alpha^2(x, x)}$$

будет класса меньшего или равного β [2]). Следовательно, предельная функция

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$$

будет класса не выше α, так как $\beta + 1 \leqslant \alpha$. Но это невозможно, так как, если класс $\varphi(x)$ не превосходит α, мы можем выбрать значение t_0 для t так, чтобы $f_\alpha(t_0, x) \equiv \varphi(x)$ при всяком x. Полагая в этом тождестве $x = t_0$, мы приходим к невозможному равенству $f_\alpha(t_0, t_0) = \varphi(t_0)$, так как каждый раз, как $f_\alpha(t_0, t_0)$ отлично от нуля, мы имеем $\varphi(t_0) = 0$ *и обратно*.

Итак, *нам удалось назвать функцию, класс которой заведомо не ниже* α; *это функция* $f_\alpha(x, x)$.

Отсюда следует, что существуют функции класса, в точности равного α, так как, если бы таких функций не было, функция $f_\alpha(x, x)$ не могла бы существовать.

---

[1]) В самом деле, не представляет никаких затруднений доказать при помощи трансфинитной индукции, что если $\Phi(x, y)$ есть функция класса $\leqslant \alpha$, то это же имеет место для $\Phi(x, x)$.

[2]) Речь идет о теореме Лебега: *если функция* $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ *будет класса* 0, *а функции* $f_1, f_2, \ldots, f_p$ — *класса не выше* α, то $\Phi = \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ *будет класса не выше* α (Sur les fonctions représentables analytiquement, стр. 153, строка 17). Доказательство такое же: методом трансфинитной индукции.

Прежде чем идти дальше, сделаем следующее важное замечание: функция $f_\alpha(x, x)$ построена при помощи счетного множества переходов к пределу. Эти переходы расположены во вполне упорядоченную последовательность, которой соответствует данное трансфинитное число α, и они *налагаются* друг на друга, т. е. они проделаны последовательно один за другим, но так, что *знание численного результата одного из переходов к пределу существенно предполагает знание численных результатов всех предшествующих переходов к пределу.*

А так как трансфинитное число α может быть как угодно большим, то очень вероятно, что нельзя назвать функцию $f_\alpha(x, x)$ без того, чтобы знать все численные результаты предшествующих переходов к пределу, т. е. без того, чтобы построить само это трансфинитное число α.

Метод Лебега для построения функции, не допускающей никакого аналитического изображения. Перейдем теперь к последнему пункту мемуара Лебега, а именно к тому, где он указывает функцию-индивидуум, неизобразимую аналитически.

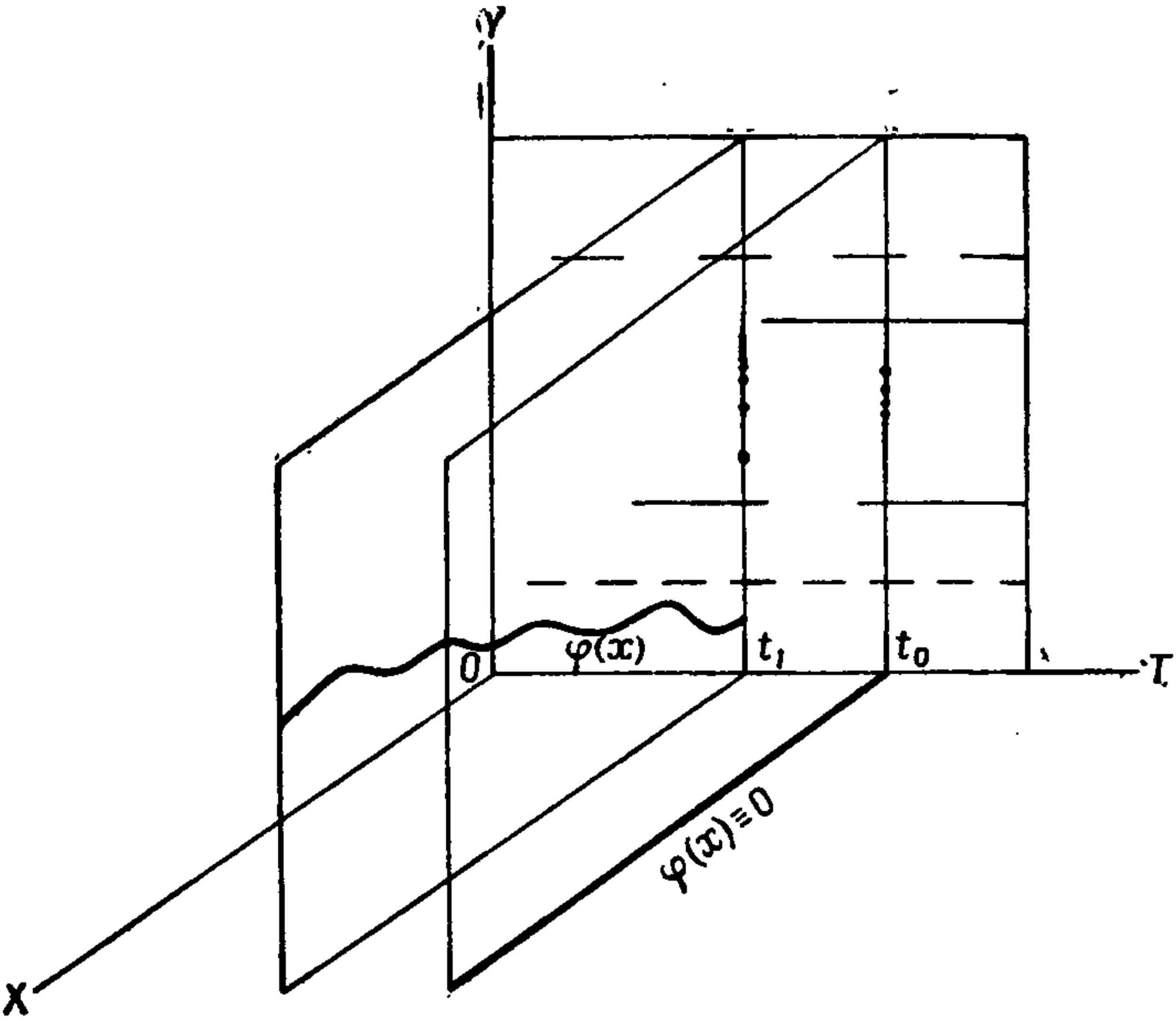
Прежде всего цитируем текстуально несколько отрывков из Лебега (стр. 213, строка 25):

«... Я предполагаю, что рациональные числа, заключенные между 0 и 1, расположены в некотором порядке, который я не уточняю, но предполагаю вполне определенным; пусть z_1, z_2, ... — рассматриваемая последовательность. Я беру некоторое значение t, заключенное между 0 и 1, и записываю его по двоичной системе счисления, употребляя, если это возможно, цифру 1 только конечное число раз; выражение для t вполне определено, как только t известно

$$t=\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2^2}+\ldots$$

«Вычеркнем из последовательности z_1, z_2, ... все те z_i, которые соответствуют индексам i цифр θ_i, равных нулю; пусть z'_1, z'_2, ... — оставшиеся z. Возможно, и так всегда будет, если чисел z' лишь конечное число, что можно найти символ класса α, обладающий следующим свойством: можно установить соответствие между числами z' и всеми символами β, меньшими α, так, чтобы одному z' отвечало только одно β

и обратно и чтобы если числам β и β' отвечают $z'(\beta)$ и $z(\beta')$, то $z'(\beta) < z'(\beta_1)$ всякий раз, как β меньше β_1. Тогда мы назовем α символом, соответствующим t. Кроме того, каждому символу β ($\beta < \alpha$) соответствует вполне определенное целое число i — индекс соответствующего z'; следовательно,



Черт. 9.

если расположить β в порядке, давая им в качестве номеров эти целые i, мы получим последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, образованную из символов, меньших α. Следовательно, рассматриваемому значению t мы можем привести в соответствие функцию $\varphi_\alpha(x)$ класса α; для этого достаточно применить вышеуказанный процесс; эту функцию $\varphi_\alpha(t)$, которая еще не определена, когда дано α, но становится определенной, когда задано t, если этому t соответствует символ α, мы назовем $\varphi(t, x)$. Если числу t не соответствует никакой символ α, я положу $\varphi(t, x) = 0$.

«Я утверждаю, что *функция* $\varphi(t, x)$ *не допускает никакого аналитического изображения...*», Если построение Лебега мы переведем на геометрический язык, то получим следующее: в пространстве трех измерений берется система прямоугольных осей координат $OXTY$ и рассматривается на плоскости OTY прямолинейное решето Γ. Прямые, на которых лежат отрезки решета, перенумерованы.

Далее рассматриваются на оси OT те точки t, в которых прямая, параллельная оси OY, пересекает решето Γ по вполне упорядоченному множеству. Пусть $\mathscr{E}$ — это множество и E его дополнение.

Установив это, заставляем t пробегать ось OT. Если точка t_0 принадлежит множеству E, то полагаем

$$\varphi(t_0, x) \equiv 0.$$

Если t_1 принадлежит к $\mathscr{E}$, то прямая $t = t_1$ пересекает решето Γ по *вполне упорядоченному* множеству и таким образом ему соответствует трансфинитное число α.

Важно заметить, что во втором случае знание t_1 влечет за собой знание последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, образованной из трансфинитных чисел, предшествующих α. В самом деле, решето Γ образовано из счетного множества прямолинейных отрезков, параллельных оси OT и расположенных в простую бесконечную последовательность. А так как каждому трансфинитному числу, меньшему α, отвечает один и только один составляющий отрезок решета Γ и, следовательно, одно целое число, то эти трансфинитные числа уже перенумерованы. Но это нам позволяет применить построение Лебега для функции $f_\alpha(x, x)$ и положить

$$\varphi(t_1, x) \equiv f_\alpha(x, x).$$

Таким образом, получается поверхность

$$y = \varphi(t, x),$$

всюду определенная и дающая пример функции, аналитически неизобразимой.

В самом деле, пересекая эту поверхность плоскостями $t = \text{const}$, мы получаем кривые, измеримые B, как угодно высоких классов, что было бы невозможно, если бы $\varphi(t, x)$ была функцией классификации Бэра и, следовательно, входила в некоторый вполне определенный класс этой классификации.

Анализ функции, построенной Лебегом. Если мы будем пытаться анализировать процесс, при помощи которого Лебег построил свою функцию $\varphi(t, x)$, не допускающую никакого аналитического изображения, то вот что мы найдем: построение этой функции разбито на две части, а именно: 1° определение $\varphi(t, x)$ для точек t_0; 2° определение $\varphi(t, x)$ для точек t_1.

В первом случае Лебег полагает $\varphi(t_0, x) \equiv 0$. Но точки t_0 образуют линейное множество E, лежащее на оси OT и определенное при помощи решета Г. Следовательно, это множество E, которое, кстати, во всем построении Лебега играет вспомогательную роль, являясь лишь промежуточным инструментом при поисках функции $\varphi(t, x)$, есть *аналитическое множество, неизмеримое B*.

Во втором случае Лебег полагает $\varphi(t_1, x) \equiv f_\alpha(x, x)$. Так как точки t_1 образуют дополнение к E, то построение функции $\varphi(t, x)$ полностью закончено. Поверхность $y = \varphi(t, x)$ таким образом определена при помощи совокупности трансфинитных чисел второго класса по Кантору.

Но употребление совокупности трансфинитных чисел здесь совершенно отлично от того, которое имеет место в теории аналитических и проективных множеств. В самом деле, мы видели, что в области проективных множеств *трансфинитное* всегда может быть исключено и заменено эквивалентным *отрицательным* определением. Здесь же не видно, как можно было бы исключить трансфинитное из определения Лебега для функции $\varphi(t, x)$. Трудность состоит именно в том, что численные значения $f_\alpha(x, x)$ получаются в результате бесконечного множества переходов к пределу, наложенных друг на друга и расположенных в трансфинитную последовательность; неизвестно, как можно было бы получить численные значения $f_\alpha(x, x)$ *непосредственно*, не переходя через эти предварительные переходы к пределу.

Итак, метод Лебега основан на употреблении трансфинитных последовательностей действительных чисел, каждое из которых имеет численное определение, существенно зависящее от численных определений предыдущих членов.

По этой же причине чрезвычайно вероятно, что поверхность $\varphi(t, x)$ Лебега не может быть определена без привлечения трансфинитного. Если это так, то природа этой поверхности совершенно новая, более интересная, чем у проективных множеств, и, без сомнения, она скоро привлечет внимание математиков. Изучение точечных множеств, которые можно назвать без рассуждения Цермело, но при помощи бесконечного множества последовательных численных определений, зависящих друг от друга, может нас привести к совершенно неожиданным результатам [34].

И тем не менее, хотя кривую $\varphi(t, x)$ нельзя задать *непосредственно*, не пользуясь предварительными переходами к пределу, но *совокупность* этих кривых может быть представлена сразу и без привлечения трансфинитного.

Точнее говоря, хотя координаты y поверхности Лебега

$$y = \varphi(t, x)$$

не могут быть *численно* определены без того, чтобы осуществить все переходы к пределу, приводящие к численному значению $\varphi(t, x)$, так как этих переходов к пределу трансфинитное число, *зависящее от t* и от x, тем не менее можно сразу, без малейших затруднений и без привлечения трансфинитов, назвать *проективную* поверхность

$$y = \psi(t, x),$$

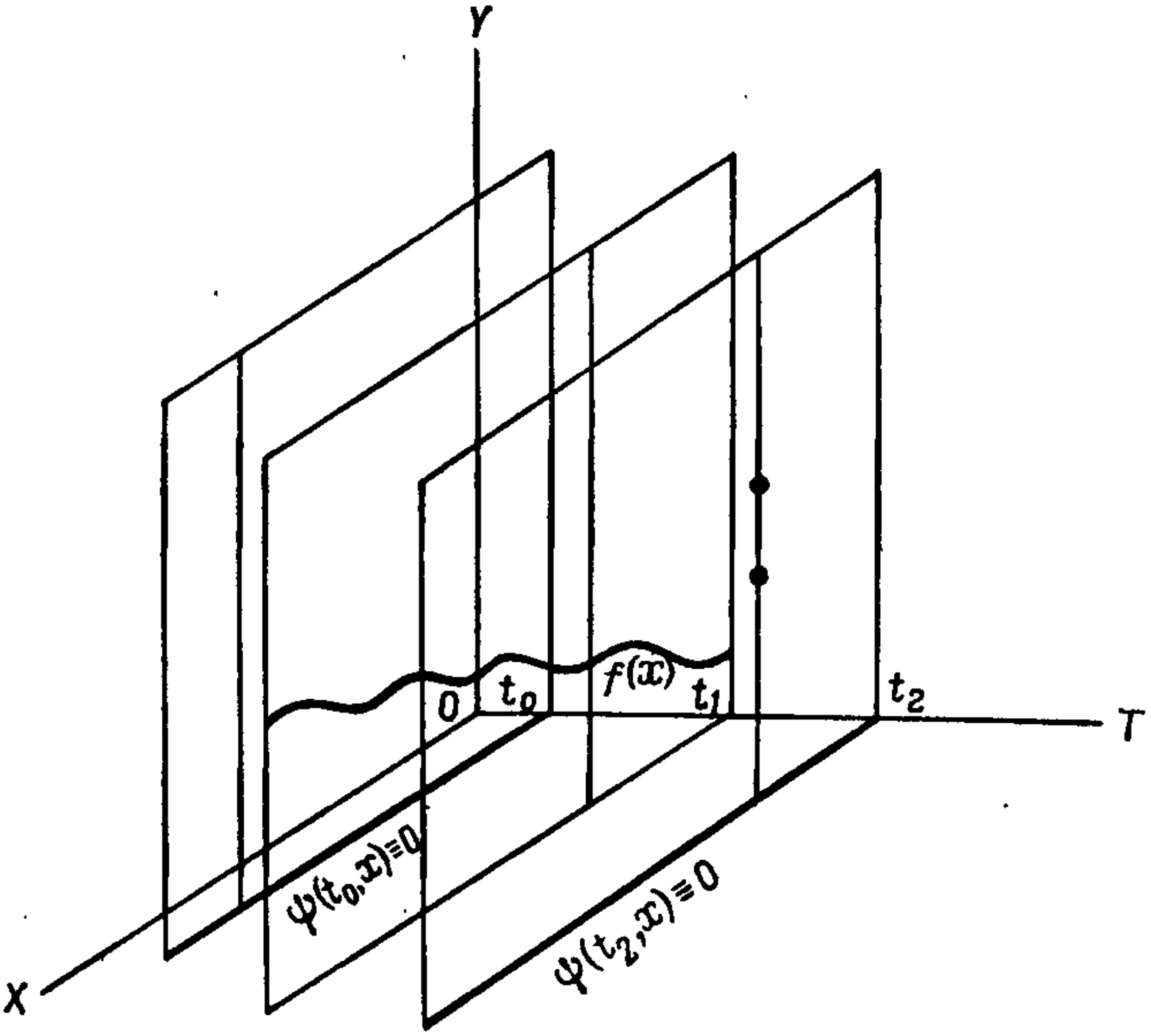
которая пересекается плоскостями $t = \text{const}$ по всем возможным кривым $y = f(x)$, измеримым B и, в частности, по всем кривым $y = f_\alpha(x, x)$ Лебега.

Чтобы получить эту проективную поверхность, мы отправляемся от универсального аналитического множества E, лежащего в трехмерном пространстве $OXTY$ и пересекаемого плоскостями $t = \text{const}$ по всем возможным плоским аналитическим множествам.

Пусть PE есть проекция множества E на плоскость XOT; рассмотрим дополнение CPE этой проекции и спроектируем его на ось OT. Множество θ_0

$$\theta_0 = PCPE,$$

полученное таким образом, есть линейное *проективное* множество класса не выше 2. Если t_0 есть точка оси OT, принадлежащая θ_0, то ясно, что плоскость $t = t_0$ заведомо содержит прямую, параллельную оси OY и *не пересекающую* универсальное множество E, С другой стороны, обозначим через H множество точек $M(t, x)$ плоскости XOT таких, что параллель к оси OY, проведенная через M, пересекает универсальное множество E



Черт. 10.

по крайней мере в двух различных точках. Известно (стр. 169), что H есть *аналитическое* множество. Значит, проекция θ_2 множества H на ось OT

$$\theta_2 = PH$$

есть линейное *аналитическое* множество. Если t_2 есть точка оси OT, принадлежащая θ_2, то ясно, что плоскость $t = t_2$ заведомо содержит прямую, параллельную оси OY и пересекающую универсальное множество E *по крайней мере в двух различных точках*.

Отсюда следует, что множество θ_1 тех точек, которые мы получим, удаляя из оси OT точки множества θ_0 и θ_2, есть *проективное множество класса* 2. Если t_1 есть точка из θ_1, то ясно, что плоскость $t = t_0$ пересекает универсальное множество E по однозначной кривой $y=f(x)$, определенной для каждого значения x. Так как точки этой однозначной кривой образуют *аналитическое* множество, то это множество по необходимости *измеримо* B и, следовательно, функция $y=f(x)$ входит в классификацию Бэра (см. дополнение II, стр. 327. — *Ред.*).

С другой стороны, так как аналитическое множество E универсально, то мы, очевидно, можем получить *всякую* кривую $y=f(x)$, измеримую B, выбирая подходящим образом точку t_1 множества θ_1 и пересекая E плоскостью $t=t_1$.

Установив это, мы возвратимся к предыдущему методу Лебега (стр. 311). Мы определим однозначную поверхность

$$y=\psi(t,\ x)$$

следующим образом:

1° Если точка t' принадлежит множеству-сумме $\theta_0+\theta_2$, мы просто положим

$$\psi(t',\ x)\equiv 0.$$

2° Если точка t'' принадлежит множеству θ_1, мы полагаем

$$\psi(t'',\ x)\equiv f(x),$$

где однозначная функция $f(x)$ определяется однозначной кривой $y=f(x)$, измеримой B, которую мы получим, пересекая множество E плоскостью $t=t''$.

Ясно, что так построенная однозначная поверхность $y=\psi(t,\ x)$ всюду определена. Я теперь утверждаю, что *эта поверхность проективна*, Это значит, что множество точек трехмерного пространства $OXTY$, принадлежащих этой поверхности, есть *проективное* множество.

Чтобы убедиться в этом, заметим, прежде всего, что рассматриваемая поверхность $y=\psi(t,\ x)$ составлена из следующих двух частей: 1° первую часть мы получим, если возьмем общую часть плоскости XOT и множества плоскостей, параллельных плоскости XOY и проведенных через точки множества $\theta_0+\theta_2$. Так как множество $\theta_0+\theta_2$ проективное, класса $\leqslant 2$, то такою же будет и рассматриваемая часть поверхности $y=\psi(t,\ x)$; 2° вторую часть мы получим, если возьмем общую часть аналитического множества E и множества плоскостей, параллельных плоскости XOY, проведенных через точки множества θ_1. Так как это последнее множество проективное класса $\leqslant 2$, то такою же будет и рассматриваемая часть поверхности $y=\psi(t, x)$.

Таким образом, мы приходим к следующему заключению: *однозначная поверхность $y=\psi(t, x)$, построенная таким способом, есть проективное множество класса $\leqslant 2$. Пересекая эту поверхность плоскостями $t=\text{const}$, мы получим только однозначные кривые $y=f(x)$, измеримые B, и каждая однозначная кривая, измеримая B, может быть получена таким образом.*

Наличие парадокса не подлежит сомнению. И объяснение его не легкое, оно, повидимому, глубоко скрыто. Вот что я могу придумать. Кривые $y=f_\alpha(x, x)$, определенные Лебегом и получаемые при пересечении поверхности Лебега $y=\varphi(t, x)$ плоскостями $t=\text{const}$, разумеется, находятся среди разрезов проективной поверхности $y=\psi(t, x)$ плоскостями $t=\text{const}$. Но *они там сдвинуты в направлении, параллельном оси OT* так, что разрез поверхности $y=\varphi(t, x)$ Лебега плоскостью $t=t'$ становится разрезом проективной поверхности $y=\psi(t, x)$ при помощи плоскости $t=t''$, где $t''\neq t'$.

Но в этих условиях *трудность получить кривую $y=f_\alpha(x, x)$, соответствующую данному трансфинитному числу α, сколь угодно большому, преобразуется в трудность получить точку t''*. Чем больше нам нужно совершить предварительных переходов к пределу, чтобы определить функцию $\varphi(t', x)\equiv f_\alpha(x, x)$, тем труднее нам будет вычислить численное значение соответствующего t'', так как функция $\psi(t, x)$ относительно проста.

Понятие континуума приобретено геометрической интуицией. При изучении континуума не встречается никаких трудностей до тех пор, пока мы стоим на чисто геометрической точке зрения; все точки прямой тождественны, так как они все имеют одни и те же свойства; трудности появляются лишь с арифметическими определениями, так как узнавание этих общих свойств становится менее легким. Полное арифметическое понятие континуума требует того, чтобы геометрический континуум рассматривался как множество точек и, следовательно, арифметический континуум как множество чисел, причем каждой точке континуума соответствует некоторое действительное число. Но геометрический континуум существенно однороден, тогда как арифметический континуум не имеет никакой однородности. Правда, каждое действительное число, заключенное между 0 и 1, может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби

$$0,\ a_1 a_2 \ldots a_n \ldots,$$

но было бы иллюзорно думать, что эта дробь есть *определение* действительного числа. Действительные числа, которые могут быть *определены* таким способом, очень немногочисленны. Всех их таким способом получить нельзя. Мы убедились в том, что истинное *определение числа t'' требует трансфинитного числа предварительных переходов к пределу* и, следовательно, эффективное определение каждого десятичного знака числа t'' не может быть достигнуто прежде, чем будет проделано трансфинитное число предварительных операций. Мы видим, что в этих условиях десятичное разложение ни на что негодно.

Но как только мы констатировали, что арифметический континуум совершенно разнороден и что существуют действительные числа t'', определение которых требует трансфинитной бесконечности предварительных операций, соответствующих как угодно большому трансфинитному числу, *становится вероятным, что в геометрическом континууме имеются точки, которые не допускают никакого арифметического или аналитического изображения.*

Из таких точек можно образовать множество. Но нельзя назвать ни одной индивидуальной точки в таком множестве. Мы даже не будем знать, «существуют» ли точки в таком множестве. Таков случай множеств-резольвент (стр. 294) и таков, на мой взгляд, случай большинства проективных множеств. Определение этих множеств, хотя оно и конечно, зависит от *отрицательных* операций и строго эквивалентно трансфинитному.

Аналитическое выражение. Являются ли функции классификации Бэра единственными, которые допускают аналитическое изображение? Этот вопрос, на мой взгляд, не имеет никакого абсолютного смысла, так как, очевидно, надо уточнить, какие операции мы допускаем.

Чтобы убедиться в этом, мы докажем, что *если допустить в качестве аналитического выражения классическую операцию, состоящую во взятии верхнего предела некоторой функции* $\overline{\lim}\,\Phi$, *то можно изобразить аналитически, отправляясь от полиномов, однозначную функцию* $f(x)$, *не входящую в классификацию Бэра.*

С этой целью возьмем плоскость XOY и рассмотрим на оси OX линейное аналитическое множество E, неизмеримое B. Характеристическая функция $f(x)$ множества E, равная 1 на E и 0 вне E, очевидно, не входит в классификацию Бэра.

Установив это, обозначим через $\mathscr{E}_n$ элементарное множество, лежащее в плоскости XOY между прямыми $y=n$ и $y=n+1$ и такое, что его ортогональная проекция на ось OX совпадает с данным аналитическим множеством E. Известно (стр. 146), что $\mathscr{E}_n$ измеримо B и класса $\leqslant 2$. Значит, сумма $H=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\ldots+\mathscr{E}_n+\ldots$ тоже измерима B и класса $\leqslant 2$. Отсюда следует, что характеристическая функция $\Phi(x, y)$ множества H есть функция класса $\leqslant 2$ классификации Бэра. Значит, мы можем изобразить функцию $\Phi(x, y)$ в виде *двойного* предела полинома от x и y

$$\Phi(x, y)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} P_{m,n}(x, y).$$

С другой стороны, возьмем любую точку x_0 оси OX. Следует различать два случая:

Первый случай. Точка x_0 не принадлежит к E. В этом случае прямая, параллельная оси OY и проведенная через x_0, не встречает множества H. Значит, функция $\Phi(x_0, y)$ переменного y тождественно равна нулю, $\Phi(x_0, y)\equiv 0$.

Второй случай. Точка x_0 принадлежит к E. В этом случае прямая $x=x_0$ пересекает множество H в бесконечном множестве точек, ординаты которых неограниченно возрастают. Следовательно, верхний предел функции $\Phi(x_0, y)$ переменного y заведомо равен 1, когда y стремится к $+\infty$.

Итак, мы можем написать

$$f(x)=\overline{\lim_{y\to+\infty}}\,\Phi(x_0, y)$$

и, следовательно, окончательно

$$f(x)=\overline{\lim_{y\to+\infty}}\,\lim_{n\to+\infty}\,\lim_{m\to+\infty} P_{m,n}(x, y),$$

где буква P *обозначает полином относительно* x *и* y *и где* $f(x)$ *не входит в классификацию Бэра.*

Следовательно, при помощи классических операций $\underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$, употребленных конечное число раз, можно записать функцию, не входящую в классификацию Бэра.

Кроме того, можно доказать, что этим способом можно записать все проективные функции и только проективные функции. Но если повторить эти две операции счетное множество раз, то мы заведомо выйдем из семейства проективных функций. Но мы не будем останавливаться на этом пункте, так как в данном случае тот факт, что функция допускает аналитическое изображение, есть, в некотором роде, побочное обстоятельство, не прибавляющее ничего к ее первоначальному логическому определению.

Замечание

Некоторые интересные исследования, касающиеся проективных множеств, были предприняты недавно Канторовичем и Ливенсоном. Полученные результаты формулированы в Comptes Rendus Acad. Sc., 30 декабря 1929 г., 10 февраля, 12 мая и 2 июня 1930 г. Подробный мемуар опубликован в Fundamenta Math., тт. XVIII, XX.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Чтобы не покидать области математики, я избегал глубоко входить в те философские дискуссии, которые могли быть вызваны многими из встреченных вопросов; да будет мне позволено в этом кратком резюме сказать все же настолько ясно, насколько я смогу это сделать, каковы, на мой взгляд, наиболее важные проблемы, которые сейчас можно поставить более четко, чем несколько лет тому назад.

На предыдущих страницах были изложены многие теории, касавшиеся различных семейств точечных множеств. В двух первых главах я старался продолжить и распространить работы Бэра, остановленные на изучении множеств класса 3. Была дана общая теория множеств, измеримых B; она привела к *арифметическому* результату о множествах класса 4, вполне аналогичному результату Бэра. В других главах целью являлось изучение семейств точечных множеств, выходящих из классификации Бэра.

Интерес исследований такого рода заключается главным образом в том, что с точки зрения принципов математического анализа можно сравнивать роль множеств, *измеримых* B, с ролью *рациональных* чисел, уподобляя множества, неизмеримые B, числам иррациональным. Хотя идея наиболее общего иррационального числа содержит в зародыше наиболее сложные аналитические трудности, однако неоспоримо, что существуют иррациональные числа, представляющиеся *естественно*. Непосредственным примером такого числа служит диагональ квадрата со стороной 1.

Мы изучали, далее, множества, неизмеримые B. Чтобы найти множество точек вне классификации Бэра и представляющееся так же *естественно*, как квадратичное иррациональное число, мы образовали довольно многочленные примеры множеств вне классификации Бэра, названных при помощи простых логических законов, где трансфинитное *явным образом* не входит. Тем не менее автор вовсе не считает, что он приблизился к решению этой важной проблемы. Различные средства, которые он мог придумать, чтобы определить такое множество, все сводятся к тому, чтобы предполагать данной совокупность иррациональных чисел (*актуальная бесконечность, имеющая мощность континуума*) или употреблять отрицательные определения, аналогичные понятию точки сгущения. Но если мы будем стремиться изгнать эти отрицательные определения, мы неизбежно наткнемся на совокупность чисел второго класса по Кантору (*трансфинитное*). Таким образом, отрицательное понятие может стать эквивалентным трансфинитному.

Автор этой книги склонен рассматривать проективные множества как объекты, определение которых не может быть вполне закончено: это чисто отрицательные понятия, которые ускользают от всякого вида положительного определения. И много шансов за то, что эти понятия попарно неприводимы. Например, автор рассматривает как неразрешимый вопрос о том, все ли проективные множества измеримы или нет, так как, на его взгляд, самые процессы определения проективных множеств и меры в смысле Лебега являются несравнимыми понятиями и, следовательно, они лишены логических взаимоотношений [35]. Короче говоря, область проективных множеств есть область, где принцип исключенного третьего уже неприменим, хотя всякое проективное множество формально определимо при помощи счетного множества условий.

Но если допускать *все* множества, измеримые B, то необходимо допустить проективные множества. Следовательно, если желать ограничивать математический анализ лишь изучением вполне законченных объектов и вполне определенных взаимоотношений, то нужно пожертвовать некоторыми множествами, измеримыми B, и даже некоторыми иррациональными числами. В конечном итоге вполне определимых иррациональных чисел имеется лишь счетное множество, хотя их перенумерование и не может быть осуществлено при помощи *математического* закона. Таким образом, арифметический континуум заведомо содержит неопределимые точки. Эти точки, каждая из которых имеет бесконечное определение, являются *паразитными* во всяком рассуждении, которое можно сделать эффективно, и таком, что оно устанавливает вполне определенную связь между уже определенными объектами. Можно было бы отметить, что в истории математической науки введение *идеальных* элементов оказало важные услуги, чего никто не станет отрицать. Но на это легко возразить, что истинно полезные идеальные элементы индивидуально различимы, чего нет в данном случае. Исключение этих точек создало бы большое упрощение в методах математического анализа. Однако в данный момент из таких *неопределимых* точек можно образовать множества, но нельзя ни назвать индивидуальную точку такого множества, ни узнать, «существуют» ли точки в таком множестве, ни узнать его свойства. По мнению автора, таков случай большинства проективных множеств. В самом деле, повидимому, в этом и заключается единственное естественное объяснение трудностей теории проективных множеств.

В конечном счете вопрос будет разрешен определенно лишь усилиями *научной* мысли, т. е. наблюдением математических фактов. Философские рассмотрения служат лишь для того, чтобы отличить истинно плодотворное направление от бесконечного множества других. Только два случая возможны:

Или дальнейшие исследования приведут когда-нибудь к точным соотношениям между проективными множествами, а также к полному решению вопросов относительно меры, категории и мощности этих множеств. С этого момента проективные множества приобретут в математике право гражданства наравне с наиболее классическими из множеств, измеримых B.

Или указанные проблемы из теории проективных множеств останутся навсегда нерешенными и к ним добавится множество новых проблем, столь же естественных и столь же недоступных. В этом случае ясно, что пришло время произвести реформу в наших идеях об арифметическом континууме.

ДОПОЛНЕНИЕ I

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР ФУНКЦИИ, НЕ ВХОДЯЩЕЙ В КЛАССИФИКАЦИЮ БЭРА [1])

1. Известно, что Бэр дал чисто арифметический пример функции 3-го класса его классификации.

Вот этот пример.

Рассмотрим основной интервал (0, 1) и в нем какое-нибудь иррациональное число x, изображенное в виде непрерывной дроби

$$x=\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cdots+\cfrac{1}{\alpha_n+\cdots}}}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — натуральные числа. Каждому иррациональному числу x однозначно соответствует определенная последовательность натуральных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_n, \ldots$ и, обратно, каждая такая последовательность определяет единственное иррациональное x.

Достаточно положить теперь, согласно Бэру, $f(x)=1$, если эта последовательность натуральных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ стремится к бесконечности, и положить $f(x)=0$ в противном случае.

Так определенная функция $f(x)$, согласно исследованиям Бэра (см. Acta Math., т. 30), является функцией в точности 3-го класса.

---

[1]) Comptes Rendus Acad. Sc., 1926 г., т. 182, стр. 1521—1522. (*Перевод А. Л. Лунц.*)

2. Для построения арифметическим путем аналогичной функции $f(x)$, не содержащейся в классах Бэра, введем следующее определение:

Будем говорить, что последовательность натуральных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *является составной, если среди ее членов имеется бесконечное множество чисел* α, *делящихся одно на другое:* $\ldots \alpha_{n_3} : \alpha_{n_2} : \alpha_{n_1}$; *в противном случае скажем, что данная последовательность* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *является простой.*

Определяемая таким образом функция $f(x)$ не входит в классификацию Бэра [36].

3. Переходя к доказательству этого, *назовем решетом всякую счетную совокупность C замкнутых отрезков σ, параллельных оси OX, расположенных внутри основного квадрата K, уравнения сторон которого суть*

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1.$$

Обозначим через $\mathfrak{E}$ *совокупность* всех точек x интервала $(0 < x < 1)$ таких, что перпендикуляр P_x, восставленный к оси OX из точки x, пересекает решето C по *вполне упорядоченному* множеству R_x, если считать, что R_x упорядочено в положительном направлении оси OY.

Множество точек интервала $(0 < x < 1)$, не принадлежащих совокупности $\mathfrak{E}$, обозначим E. Именно это множество E (а не $\mathfrak{E}$) *мы будем называть множеством, определяемым решетом C.*

Введем важное понятие, позволяющее различать решета:

Говорят, что C есть ограниченное решето, если существует счетное вполне упорядоченное множество W, порядковый тип которого больше порядкового типа множества R_x при любом x, не принадлежащем к определяемому решетом C множеству E.

Будем говорить, что решето C имеет лебеговский тип, если, каково бы ни было подмножество Y_1 счетного множества Y, составленного из ординат сегментов σ решета C, найдется точка x, для которой множество R_x совпадает с Y_1.

Для того чтобы решето C было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы множество E было измеримо B. Никакое множество, определенное с помощью решета лебеговского типа, не может быть измеримым B множеством.

4. *Множество E точек, для которых $f(x)=1$, является множеством, определенным с помощью решета лебеговского типа.* Чтобы убедиться в этом, достаточно поставить в соответствие каждому интервалу Бэра $\mathcal{J}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ сегмент $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, следующим образом определенный:

1. Проекция σ на ось OX совпадает с $\mathcal{J}$.

2. Ордината отрезка $\sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ есть рациональное число вида

$$\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2^2}+\ldots+\frac{\theta_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{\theta_n}{2^n},$$

где $\theta_n=1$, а для $i<n$ имеем $\theta_i=0$, если α_i есть делитель α_n, и $\theta_i=1$ в противном случае.

Совокупность всех таких сегментов σ составляет решето C лебеговского типа, определяющее множество $[f(x)=1]$.

Таким образом, среди законов арифметики можно найти такие, которые приводят к множествам, не измеримым B.

ДОПОЛНЕНИЕ II

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О КРИВЫХ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ АНАЛИТИЧЕСКИМИ ДОПОЛНЕНИЯМИ [1])

1. Назовем *униформной кривой* в плоскости XOY всякое точечное множество C, которое пересекается каждой прямой, параллельной оси OY в одной и только одной точке. Если M — какая-либо точка множества C, определенная координатами x и y, то ордината y является, очевидно, величиной, зависящей от x, и является, таким образом, однозначной функцией действительного переменного $f(x)$, определенной для всех значений x бесконечного интервала $(-\infty < x < +\infty)$. В этом случае равенство

$$y = f(x)$$

называется уравнением кривой C.

Обозначим через J и S два множества точек плоскости XOY, определенные кривой C и расположенные соответственно ниже и выше этой кривой. По точному определению J есть множество точек $M(x, y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $y < f(x)$. Точно так же S есть множество точек $M(x, y)$, для которых $y > f(x)$. В результате плоскость XOY разбита на три множества J, C и S, не имеющие попарно общих точек. Совершенно очевидно, что среди трех множеств J, C и S одно вполне определяет два других.

---

[1]) Mathematica, Cluj, 1934 г., т. 10, стр. 70—80. (*Перевод Р. Ю. Мацкиной.*)

Установив это, приведем теперь основные факты, которые следуют из работ Бэра, Бореля, Лебега и Валле-Пуссена:

I. *Если функция $f(x)$ входит в классификацию Бэра, то три множества J, C и S измеримы B.*

II. *Если одно из двух множеств J и S измеримо B, то функция $f(x)$ входит в классификацию Бэра.*

Мы дополним эти основные результаты следующим свойством:

III. *Если множество C аналитическое, в частности измеримое B, то функция $f(x)$ обязательно входит в классификацию Бэра* [1]).

Доказательство получается немедленно, если применить теорию аналитических множеств. В самом деле, известно, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция действительного переменного $f(x)$ входила в классификацию Бэра, состоит в том, что одно из четырех множеств

$$E(f \geqslant A), \quad E(f < A), \quad E(f > A), \quad E(f \leqslant A)$$

было измеримо B, каково бы ни было A (см. Ch. de la Vallée-Poussin, Intégrales, Fonctions, Classes de Baire, стр. 32).

Проведем в плоскости XOY прямую $y = A$, параллельную оси OX, и обозначим через C' часть данной кривой C, которая расположена *ниже* этой параллели; пусть C'' — множество остальных точек C. Так как множество C, по предположению, аналитическое, то множество C' — тоже аналитическое, потому что общая часть двух аналитических множеств (C и открытой полуплоскости, определенной параллелью $y = A$) является также аналитическим множеством [2]). Точно так же множество C'' — аналитическое, будучи общей частью множества C и замкнутой полуплоскости, определенной прямой $y = A$.

Установив это, спроектируем два множества C' и C'' на ось OX и обозначим через e' и e'' соответствующие проекции множеств C и C''. Так как кривая C униформна, множества e' и e'' не имеют общих точек и их сумма $e' + e''$

---

1) W. Sierpinski, Fundamenta Math., т. II (1921), стр. 78 и 79.

2) См. мои лекции об аналитических множествах, стр. 139 (в настоящем издании стр. 139. — *Ред.*).

совпадает с осью OX. Но множества C' и C'' — аналитические; из этого следует, что их проекции e' и e'' на ось OX являются аналитическими множествами [1]).

С другой стороны, множества e' и e'', будучи аналитическими и не имея общих точек, отделимы B [2]). Это означает, что существуют два множества H' и H'', измеримые B, не имеющие общих точек и такие, что H' содержит e' и соответственно H'' содержит e''. Так как множества e' и e'' являются взаимными дополнениями, они необходимо совпадают с соответствующими отделяющими множествами H' и H''. Мы заключаем отсюда, что два рассматриваемых множества, e' и e'', измеримы B.

Но из самого определения множества e' мы имеем тождество

$$e' = E(f < A),$$

и так как e' измеримо B, мы заключаем, что рассматриваемая функция $f(x)$ входит в классификацию Бэра. Ч. т. д.

Важно заметить, что если и ввести ограничительное предположение относительно измеримости B рассматриваемой кривой C, все же нет другого доказательства, не привлекающего теорию аналитических множеств. Было бы очень интересно суметь дать другое доказательство, позволяющее вывести без помощи теории аналитических множеств, непосредственно из измеримости B кривой C, тот важный факт, что соответствующая функция $f(x)$ входит в классификацию Бэра [3]).

Предположения I, II и III можно рассматривать как положительные предложения, т. е. такие, которые дают положительный ответ на поставленный вопрос, и было бы очень желательно, чтобы последующие исследования всегда продолжались и распространялись в таком же направлении. Но на этом пути мы сталкиваемся с определенно отрицательными результатами.

Прежде всего, мы видели, что из аналитичности множества C следует, что функция $f(x)$ входит в классификацию

---

[1]) См. мои лекции об аналитических множествах, стр. 144 (в настоящем издании стр. 143. — *Ред.*).

[2]) Там же, стр. 156 (в настоящем издании стр. 155. — *Ред.*).

[3]) По мнению Серпинского, эта проблема трудна, даже если предположить, что C является множеством типа G_δ.

Бэра. Но мы не можем получить аналогичного результата из предположения аналитичности множества J или S:

Аналитичность одного из двух множеств J и S не влечет за собой измеримость B кривой C, и функция $f(x)$ может не быть функцией классификации Бэра.

Чтобы это увидеть, достаточно рассмотреть следующий пример. Пусть E — какое-либо аналитическое множество, неизмеримое B, расположенное на оси OX. Пусть $f(x)$ — характеристическая функция множества E, т. е. равная 1 в точках множества E и равная 0 в остальных точках. Обозначим через C кривую, определенную уравнением $y=f(x)$. Я утверждаю теперь, что *плоское множество J является множеством аналитическим*. Действительно, множество J является, очевидно, объединением двух частей J_1 и J_2, имеющих общие точки: *первая* часть J_1 представляет собой множество точек $M(x, y)$ плоскости, у которых отрицательна ордината, следовательно, множество J_1 есть открытая полуплоскость, а значит, измеримо B и, таким образом, есть *аналитическое множество. Вторая часть* J_2 является множеством точек $M(x, y)$ плоскости, абсцисса которых входит в данное аналитическое множество E, а ордината y меньше 1, $y<1$. Легко доказать, что множество J_2 — *аналитическое.*

Чтобы увидеть это, возьмем параметрическое представление

$$x=\varphi(t) \tag{1}$$

данного аналитического множества E; здесь $\varphi(t)$ — функция, определенная для всех иррациональных значений t интервала $(0<t<1)$ и непрерывная в каждой точке[1]). Если мы напишем одновременно два уравнения

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t), \\ y&=1-u^2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

мы получим, очевидно, параметрическое представление множества J_2, осуществленное с помощью двух функций $\varphi(t)$ и $1-u^2$ двух действительных переменных t и u, которые явно входят в классификацию Бэра. Мы заключаем отсюда[2]),

---

[1]) См. мои лекции об аналитических множествах, стр. 135 (в настоящем издании стр. 135. — *Ред.*).

[2]) Там же, стр. 146 (в настоящем издании стр. 145. — *Ред.*),

что рассматриваемое множество J_2 является *аналитическим* множеством.

Отсюда следует, что само множество J — *множество аналитическое*, так как мы имеем $J = J_1 + J_2$ [1]).

С другой стороны, так как данное аналитическое множество E неизмеримо B, характеристическая функция $f(x)$ множества E не может входить в классификацию Бэра. Ч. т. д.

3. Итак, множество J, определенное какой-либо кривой C, может быть аналитическим без того, чтобы соответствующая функция $f(x)$ входила в классификацию Бэра. Точно так же аналитичность множества S не влечет за собой измеримость B соответствующей кривой C, так как множество J, определенное для кривой

$$y = f(x),$$

является, очевидно, множеством S для кривой

$$y = -f(x).$$

Но важно заметить, что одновременная аналитичность множеств J и S влечет положительное утверждение, которое гласит:

IV. *Если оба множества J и S аналитические, то функция $f(x)$ входит обязательно в классификацию Бэра.*

Чтобы показать это, предположим сначала, что только множество J аналитическое, и рассмотрим новую кривую, которую мы обозначим через $C^{(\varepsilon)}$, определенную уравнением

$$y = f(x) + \varepsilon,$$

где функция $f(x)$ соответствует данной кривой C, а ε — произвольное положительное число. Пусть $J^{(\varepsilon)}$ и $S^{(\varepsilon)}$ — множества, определенные кривой C и расположенные соответственно *ниже* и *выше* этой кривой. Ясно, что множество $J^{(\varepsilon)}$ — не что иное, как множество J, перемещенное в положительном направлении оси OY на положительную величину. Отсюда следует, что оба множества J и $J^{(\varepsilon)}$ одной природы. Так как множество J, по предположению, аналитическое, то множество $J^{(\varepsilon)}$ также аналитическое.

Будем теперь придавать ε бесконечную убывающую последовательность значений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \ldots$, стремящуюся

---

[1]) См. мои лекции об аналитических множествах, стр. 138 (в настоящем издании стр. 138. — *Ред.*).

к нулю. Так как множество $J^{(\varepsilon_n)}$ аналитическое, каково бы ни было натуральное число n, пересечение аналитических множеств $J^{(\varepsilon_1)}, J^{(\varepsilon_2)}, \ldots, J^{(\varepsilon_n)}, \ldots$ является снова множеством *аналитическим*[1]). Но это пересечение, очевидно, есть не что иное, как сумма двух множеств J и C. Таким образом, если мы предполагаем множество J аналитическим, то сумма $J+C$ является обязательно аналитическим множеством и, следовательно, множество S является *аналитическим дополнением*.

До сих пор мы делали единственное допущение, что множество J *аналитическое*. Мы вывели из этого, что множество S является *аналитическим дополнением*. Из этого следует, что если мы сделаем второе допущение и предположим множество S *аналитическим*, мы придем к выводу, что множество S заведомо *измеримо* B и, следовательно, функция $f(x)$ входит в классификацию Бэра. Ч. т. д.

Из самого доказательства предыдущей теоремы мы видели, что аналитичность множества J влечет за собой аналитичность суммы $J+C$. Но и обратное предложение опять-таки имеет место:

Аналитичность суммы $J+C$ влечет за собой обязательно аналитичность множества J.

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть кривую C_ε, определенную с помощью

$$y=f(x)-\varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число, и функция $f(x)$ соответствует данной кривой C. Обозначим через J_ε и S_ε два множества, расположенные соответственно ниже и выше кривой C_ε. Ясно, что множество J_ε и кривая C_ε являются не чем иным, как множеством J и данной кривой C, перемещенными в отрицательном направлении оси OY на положительную величину ε. Отсюда следует, что оба множества-суммы $J_\varepsilon+C_\varepsilon$ и $J+C$ являются множествами одной природы, и, следовательно, если множество $J+C$ аналитическое, то и множество $J_\varepsilon+C_\varepsilon$ также аналитическое.

Будем придавать теперь ε бесконечную убывающую последовательность значений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, стремящуюся

---

[1]) См. мои лекции об аналитических множествах, стр. 139 (в настоящем издании стр. 139. — *Ред.*).

к нулю. Так как множество $J_{\epsilon n}+C_{\epsilon n}$ аналитическое, каково бы ни было натуральное число n, сумма множеств $J_{\epsilon n}+C_{\epsilon n} (n=1, 2, 3 \ldots)$ является также *аналитическим множеством*[1]). Но это множество-сумма совпадает, очевидно, с исследуемым множеством J, что и доказывает аналитичность J. Ч. т. д.

Точно так же аналитичность $C+S$ влечет аналитичность S.

4. Желая изучать различные кривые C с точки зрения чисто геометрической, следует начать с различения наиболее простых кривых. Очевидно, что среди кривых C наиболее простыми являются кривые, измеримые B, и что тем более простой является кривая C, чем меньше класс множества C.

Казалось бы, что наиболее простыми кривыми C, идущими вслед за кривыми, измеримыми B, являются аналитические кривые, неизмеримые B. Но изучение таких кривых было бы ложным шагом, потому что, как мы видели, не существует таких кривых: *каждая аналитическая кривая обязательно измерима B.*

Следовательно, здесь имеется нечто вроде разрыва, скачка, и наиболее простыми кривыми, идущими за кривыми, измеримыми B, повидимому, являются *аналитические дополнения.*

Следует заметить, что точка зрения *чисто геометрическая* очень заметно отличается от точки зрения *аналитической*. С точки зрения анализа *характеристическая функция* $f(x)$ аналитического множества E, неизмеримого B, является функцией довольно простой, и может рассматриваться как немедленно следующая за функциями классификации Бэра. В противоположность этому, геометрия рассматривает *кривую C*, соответствующую функции

$$y=f(x),$$

как кривую очень сложную, потому что ее геометрическая природа представляет собой объединение, части которого имеют между собой отношения сложные и трудно уловимые:

---

[1]) См. мои лекции об аналитических множествах, стр. 138 (в настоящем издании стр. 138. — *Ред.*).

действительно, эта кривая C не является ни аналитическим множеством, ни аналитическим дополнением, будучи суммой двух множеств, одно из которых аналитическое, а другое аналитическое дополнение.

Исходя из этого, ставится вопрос, узнать, *существуют ли в действительности кривые C, которые являются аналитическими дополнениями, неизмеримыми B.* Этот вопрос является тем более естественным, что не имеется аналитических кривых, неизмеримых B.

И очень важная теорема Мазуркевича[1]) дает нам ответ определенно положительный. Вот формулировка этой теоремы: *каково бы ни было аналитическое множество E, расположенное на оси OX, существует униформное аналитическое дополнение H, расположенное в плоскости XOY, ортогональная проекция которого на ось OX совпадает с E.*

Чтобы хорошо понять смысл этой теоремы, следует отметить, что *униформным* называют всякое множество точек плоскости XOY, которое пересекается каждой прямой, параллельно оси OY, не более чем в одной точке. В первую минуту этот важный результат С. Мазуркевича кажется весьма парадоксальным, потому что всякое аналитическое дополнение, расположенное на измеримой B кривой C, имеет проекцией аналитическое дополнение, и потому что имеется очень обширное семейство униформных аналитических дополнений, которые не могут быть помещены на измеримой B кривой C и тем не менее имеют в качестве проекций на ось OX аналитические дополнения: а именно, таким является множество точек единственности плоского измеримого B множества $\mathcal{E}$, т. е. множество точек $\mathcal{E}$, лежащих на параллелях оси OY, пересекающих $\mathcal{E}$ в одной и только одной точке[2]).

Теорема Мазуркевича доставляет нам средство для отыскания униформной кривой C, являющейся аналитическим дополнением, неизмеримым B. В самом деле, возьмем на оси OX какое-нибудь аналитическое множество, неизмеримое B. Пусть H — униформное аналитическое дополнение, расположенное

---

[1]) См. S. Mazurkiewicz, Sur une propriété des ensembles $C(A)$, Fundamenta Mathematicae, т. X, стр. 172—174. Лекции об аналитических множествах, стр. 284 (в настоящ. изд. стр. 285.—*Ред.*).

[2]) См. мои лекции об аналитических множествах, стр. 255 (в настоящем издании стр. 257. — *Ред.*).

над осью OX, проекция которого на эту ось совпадает с данным аналитическим множеством E.

Возьмем в качестве униформной кривой C множество, состоящее из точек H и из точек оси OX, которые не входят в E. Ясно, что C является суммой двух аналитических дополнений: H и CE. Таким образом, C является аналитическим дополнением. С другой стороны, очевидно, что C неизмеримо B, потому что часть H кривой C, расположенная над осью OX, была бы в противном случае множеством, измеримым B, что невозможно, ибо проекция E множества H — заведомо неизмеримое B множество [1]).

Итак, *существуют неизмеримые B кривые C, которые являются тем не менее аналитическими дополнениями.*

Из этого предложения следует, что *аналитичность суммы $J+S$ не влечет за собой измеримости B кривой C, и функция $f(x)$ может не быть функцией классификации Бэра.*

5. Так как можно рассматривать кривые C, являющиеся аналитическими дополнениями, как наиболее простые вслед за измеримыми B кривыми, было бы очень желательно, чтобы имелись какие-либо общие результаты относительно соответствующих функций $f(x)$. Первая из проблем, которые ставятся в связи с функциями $f(x)$, — проблема о природе множеств J и S. Являются ли эти множества всегда проективными множествами? Положительный ответ нетруден и почти очевиден. Но строгие исследования относительно *точной* природы множеств J и S кажутся представляющими большие трудности.

Пусть C — кривая, являющаяся аналитическим дополнением, и $f(x)$ — соответствующая функция. Возьмем последовательность $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ всех рациональных чисел и проведем в плоскости XOY прямую $y = r_n$, параллельную оси OX. Пусть C_n — часть C, расположенная над этой параллелью; ясно, что C_n — аналитическое дополнение, измеримое B или неизмеримое B. Обозначим через e_n проекцию C_n на ось OX; ясно, что e_n — проективное множество, которое может быть представлено в форме $PCPE$, где E — измеримое B множе-

---

[1]) Проекция униформного измеримого B множества всегда измерима B. Там же, стр. 166 (в настоящем издании стр. 166. — *Ред.*).

ство, так как множество C_n, являющееся аналитическим дополнением, может быть записано как CPE [1]). Таким образом, множество e_n является множеством (A_2). Отсюда следует, что линейное дополнение множества e_n, которое мы обозначим через η_n, является проективным множеством (CA_2). Согласно теореме о множествах параллелей [2]), мы заключаем, что множество H_n точек $M(x, y)$ плоскости, абсциссы которых x принадлежат η_n и ординаты $y < r_n$, является плоским проективным множеством (CA_2). Теперь, если мы будем изменять натуральное число n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, и возьмем сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n$, мы будем иметь плоское проективное множество, которое снова является множеством (CA_2), так как сумма счетного числа множеств (CA_n) является проективным множеством и самое большее (CA_n) [3]). Но, очевидно, что множество-сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n$ совпадает с множеством J, определенным для данной кривой C. Таким образом, множество J проективно и самое большее (CA_2).

Так как множество S, определенное для кривой $y = f(x)$, является множеством J для кривой $y = -f(x)$, мы заключаем, что множество S также проективно и самое большее (CA_2). Так как данная кривая C является аналитическим дополнением, а значит (CA_1), то отсюда следует, что множество-сумма $C + S$ является самое большее (CA_2), и значит, дополнительное множество J не более чем (A_2). Так как множество J является одновременно (CA_2) и (A_2), мы заключаем, что *множество J не более чем* (B_2). То же заключение имеет место и для множества S.

Итак: *если кривая C является аналитическим дополнением, то два соответствующих множества J и S являются проективными множествами не более чем* (B_2).

Между тем вероятно, что это — грубое определение природы J и S и что дальнейшие исследования будут проведены со всей точностью.

---

[1]) Там же, стр. 269 (в настоящем издании стр. 271. — *Ред.*).
[2]) Там же, стр. 276 (в настоящем издании стр. 278. — *Ред.*).
[3]) Там же, стр. 277 (в настоящем издании стр. 279. — *Ред.*).

В случае кривой Мазуркевича природа множеств J и S может быть уточнена. В самом деле, если дано какое-либо аналитическое множество E на оси OX, Мазуркевич строит в плоскости XOY множество $\mathcal{E}$, измеримое B, проекцией которого на ось OX является данное аналитическое множество E. Следует отметить, что каждая прямая, параллельная оси OY, проведенная через какую-либо точку x множества E, пересекает множество $\mathcal{E}$ по множеству $\mathcal{E}_x$ точек, ***нижняя грань которого μ является обязательно точкой множества $\mathcal{E}_x$***. Мазуркевич доказал, что множество H точек μ_x, соответствующих точкам множества E, является аналитическим дополнением, которое, очевидно, униформно. И легко доказать, что множество θ точек $M(x, y)$ плоскости, расположенных над точками μ_x, является множеством *аналитическим*.

Действительно, множество θ обладает параметрическим представлением с двумя переменными

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) + u^2, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ дают параметрическое представление плоского измеримого B множества $\mathcal{E}$, а u — произвольный параметр.

С другой стороны, ясно, что множество всех точек $M(x; y)$ плоскости XOY, абсциссы которых x принадлежат E, является плоским аналитическим множеством; пусть D — это множество. Наконец, обозначим через G множество точек $M(x, y)$ плоскости, абсциссы которых x не принадлежат E и ординаты y отрицательны. Ясно, что G является плоским *аналитическим дополнением*.

Далее очевидно, что исследуемое множество J представляется следующей формулой:

$$J = G + (D - \theta) = G + D \cdot C\theta.$$

Из этого следует, что J есть сумма аналитического дополнения и общей части аналитического множества и аналитического дополнения. Таким образом, множество J является множеством (B_2) очень частного вида, будучи составлено из аналитических множеств и их дополнений с помощью двух операций: *суммы и пересечения*, повторенных *конечное число раз* [1]).

6. Теперь ставится интересный вопрос: обязательно ли отделимы B две кривые, являющиеся аналитическими дополнениями, одна из которых находится под другой? Ответ, очевидно, зависит от самого определения отделимости *B-кривых*. Здесь можно дать следующие три определения отделимости B-кривых:

Первое определение. Две произвольные кривые C_1 и C_2, одна из которых расположена над другой, называются *отделимыми B с помощью кривой*, если можно провести в плоскости промежуточную кривую C [2]), измеримую B, которая расположена под одной и над другой из данных двух кривых C_1 и C_2.

Это определение не может представлять, очевидно, никакого интереса, потому что, какова бы ни была кривая $y=f(x)$, проведенная в плоскости XOY и неизмеримая B, можно указать такую положительную величину ε, чтобы две кривые $y=f(x)$ и $y=f(x)+\varepsilon$ были *неотделимы B* в смысле первого определения. Действительно, в противном случае легко видеть, что если придавать ε убывающую последовательность значений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, стремящуюся к нулю, то функция $f(x)$ является пределом последовательности промежуточных функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, входящих в классификацию Бэра, равномерно сходящейся к $f(x)$. Таким образом, функция $f(x)$ и сама входит в классификацию Бэра.

Второе определение. Две произвольные кривые C_1 и C_2 называются *отделимыми B с помощью двух множеств*, если можно найти два множества H_1 и H_2, измеримые B, не имеющие общих точек и такие, что C_1 содержится в H_1 и соответственно C_2 содержится в H_2.

В связи с этим определением можно указать без труда, что *существуют две кривые C_1 и C_2, являющиеся аналитическими дополнениями и неотделимые B в смысле второго определения.*

---

[1]) Там же, стр. 281 и 285 (в настоящем издании стр. 282 и 286. — *Ред.*).

[2]) Ср. Ch. de la Vallée-Poussin, Intégrales, Fonctions, Classes de Baire, стр. 128.

Чтобы убедиться в этом, возьмем в интервале $(0 < x < 1)$ оси OX два аналитических дополнения $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, которые неотделимы B с точки зрения отделимости B точечных множеств. Известно, что такие аналитические дополнения существуют [1]).

Пусть H_1 — униформное аналитическое дополнение, расположенное под осью OX, проекция которого на эту ось совпадает с линейным аналитическим множеством $C\mathscr{E}_1$. Точно так же, пусть H_2 — униформное аналитическое дополнение, расположенное над осью OX, проекция которого на ось OX совпадает с линейным аналитическим множеством $C\mathscr{E}_2$.

Исходя из этого, мы определим две функции действительного переменного $f_1(x)$ и $f_2(x)$ следующим образом:

$f_1(x)$ равна нулю на $\mathscr{E}_1$ и ординатам точек униформного множества H_1 вне $\mathscr{E}_1$;

$f_2(x)$ равна нулю на $\mathscr{E}_2$ и ординатам точек униформного множества H_2 вне $\mathscr{E}_2$.

Совершенно очевидно, что $f_1(x) < f_2(x)$, каково бы ни было x, что кривые C_1 и C_2, определенные соответственно уравнениями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, являются аналитическими дополнениями и что C_1 и C_2 неотделимы B в смысле второго определения.

Третье определение. Две произвольные кривые C_1 и C_2, одна из которых расположена под другой, называются *отделимыми B с помощью множества*, если существует в плоскости XOY измеримое B множество E, расположенное между двумя данными кривыми C_1 и C_2, которое пересекается обязательно каждой прямой, параллельной оси OY, по крайней мере в одной точке.

С точки зрения этого определения ничего не известно об отделимости кривых, которые являются аналитическими дополнениями. Можно только заметить, что каждое плоское измеримое B множество содержит униформизирующее множество H, которое является аналитическим дополне-

---

1) См. мои лекции об аналитических множествах, стр. 220, 260, 263 (в настоящем издании стр. 221, 262, 265. — *Ред.*). См. также П. С. Новиков, Sur les fonctions implicites mesurables B (Fundamenta Mathematicae, т. XVII, стр. 8).

нием [1]) и что униформизирующая кривая C множества E должна быть расположена между двумя данными кривыми C_1 и C_2, равно как и отделяющее множество E.

Замечу, что вопросы, очень близкие к тем, которые рассматривались в настоящей статье, излагаются в работе: W. Sierpinski; Sur certains ensembles plans (Mathematica, т. IV, стр. 178, Cluj, 1931).

[1]) См. работы по униформизации множеств В. Серпинского, «Sur certains ensembles plans» и Н. Лузина, «Sur le problème de M. Jacques Hadamard d'uniformisation des ensembles» (Mathematica, т. IV, Cluj, 1930, стр. 62 и 178).

ПРИМЕЧАНИЯ

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ I

[1] (стр. 23). *Пространством Бэра R* называется топологическое пространство, элементами которого являются всевозможные последовательности целых положительных чисел:

$$a = (n_1, n_2, \dots n_k, \dots).$$

Окрестностью в R является множество тех точек R, у которых первые k знаков фиксированы. Это множество — обозначим его $\delta_{n_1 \dots n_k}$ — называется *интервалом Бэра порядка k*. Пространство R взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображается на множество всех иррациональных точек, заключенных в отрезке $[0, 1]$, а следовательно, и на множество $\mathcal{J}_x$ всех иррациональных точек оси OX. Для доказательства достаточно заметить, что каждое иррациональное число, заключенное между 0 и 1, может быть представлено в виде непрерывной дроби:

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots}}}$$

В пространстве Бэра вводится *расстояние* между двумя точками (x, y) следующим образом: если первые k знаков $n_1, n_2, \dots, n_k$ у элементов x и y одинаковы, а $(k+1)$-е знаки различны, то

$$\rho(x, y) = \frac{1}{k}.$$

Определенное таким образом *пространство R является полным метрическим пространством*, в отличие от пространства иррациональных точек с евклидовским расстоянием между двумя точками. Н. Н. Лузин рассматривает основную область $\mathcal{J}_x$ как множество всех иррациональных точек оси OX, не касаясь ее топологической структуры. Однако он фактически неоднократно на нее опирается, используя тот факт, что бесконечная убывающая последовательность интервалов Бэра всегда содержит точку.

[2] (стр. 23). Нельзя согласиться с утверждением автора о причине простоты изложения дескриптивной теории множеств в пространстве $\mathcal{J}_x$. Эта простота связана не с тем обстоятельством, что пространство $\mathcal{J}_x$ более однородно, тогда как классическая числовая прямая содержит разнородные элементы, а с тем, что пространство $\mathcal{J}_x$ нульмерно (не содержит никакой связной части). Выбросив из оси OX произвольное всюду плотное счетное множество E, мы получим пространство R, на котором построение дескриптивной теории множеств будет в точности таким же, как в пространстве $\mathcal{J}_x$, независимо от арифметической структуры элементов множества E.

[3] (стр. 49). Область $\mathcal{J}_{xy}$ является топологическим произведением $\mathcal{J}_x \times \mathcal{J}_y$ областей $\mathcal{J}_x$ и $\mathcal{J}_y$, а порция области $\mathcal{J}_{xy}$ — топологическим произведением $(a, b) \times (c, d)$ двух порций соответственно областей $\mathcal{J}_x$ и $\mathcal{J}_y$. Интервалом Бэра порядка $\Delta_{n_1 \ldots n_k}$ области $\mathcal{J}_{xy}$ называется топологическое произведение двух интервалов Бэра порядка k областей $\mathcal{J}_x$ и $\mathcal{J}_y$. Заметим, что все области $\mathcal{J}_{xy}$, $\mathcal{J}_{xyz}$ и т. д. гомеоморфны области $\mathcal{J}_x$. Для доказательства достаточно сначала установить взаимно однозначное соответствие между интервалами Бэра порядка 1 области $\mathcal{J}_x$ и интервалами Бэра порядка 1 области $\mathcal{J}_{xy}$. После того как установлено соответствие между интервалами порядка $k-1$, установить взаимно однозначное соответствие между всеми интервалами Бэра порядка k области $\mathcal{J}_x$, содержащимися в интервале $\delta^x_{n_1 \ldots n_{k-1}}$, и всеми интервалами Бэра порядка k области $\mathcal{J}_{xy}$, содержащимися в интервале Бэра $\Delta^{xy}_{m_1 \ldots m_{k-1}}$, соответствующем $\delta^x_{n_1 \ldots n_{k-1}}$.

Важно заметить, что области $\mathcal{J}_x$, $\mathcal{J}_{xy}$, ..., $\mathcal{J}_{x_1}$, ..., $\mathcal{J}_{x_m}$ имеют размерность 0. Как мы уже указывали (прим. 2), этим и объясняется то обстоятельство, что дескриптивная теория множеств в этом пространстве становится особенно простой и стройной. Употребляемый Н. Н. Лузиным термин «область m измерений» $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ относится только к расположению области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$ в евклидовом пространстве, а не к размерности этой области. Следует отметить, что, используя области $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_m}$, лежащие в евклидовых пространствах нескольких измерений, Н. Н. Лузин достигает чрезвычайно большой геометрической ясности при исследовании очень сложных вопросов теории множеств.

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ II

[4] (стр. 51). Бэр дал первоначально классификацию функций, определенных на евклидовой прямой. Н. Н. Лузин рассматривает здесь функции, определенные на $\mathcal{J}_x$. Классы Бэра для таких функций определяются следующим образом. Функции, непрерывные на $\mathcal{J}_x$, принадлежат к классу 0. Функция принадлежит к классу α, если она

не принадлежит ни к какому классу $\alpha' < \alpha$, и является пределом сходящейся на $\mathcal{J}_x$ последовательности функций классов $< \alpha$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x); \qquad \mathrm{cl} f_n(x) < \alpha.$$

Изучая функции, определенные на области $\mathcal{J}_x$, естественно потребовать, чтобы эти функции принимали только иррациональные значения, т. е. рассматривать отображения области $\mathcal{J}_x$ в область $\mathcal{J}_y$. Тогда кривая, изображающая функцию $y = f(x)$, содержится в области $\mathcal{J}_{xy}$. Лебеговскими множествами для функции $f(x)$ называются множества $[f(x) > r]$ и $[f(x) < r]$ тех точек оси OX, где выполняются неравенства соответственно $f(x) > r$ или $f(x) < r$, причем r — рациональное число. *Если функция $f(x)$ принадлежит к классу α классификации Бэра, то ее лебеговские множества являются измеримыми B множествами класса α и обратно* (см. Ляпунов, B-функции, Успехи матем. наук, т. V, вып. 5 (39), 1950, стр. 110).

[5] (стр. 54). Понятия математики в силу своей абстрактной природы, вообще говоря, являются законными и осмысленными в определенном круге вопросов, при соблюдении определенных предпосылок. Вне этих условий эти понятия могут становиться фиктивными и терять смысл. Это относится, в частности, к понятию существования математического объекта. Н. Н. Лузин относится критически к утверждению существования тех объектов, которые порождаются принципом произвольного выбора и также к тем, в основе которых лежит утверждение о существовании всех трансфинитных чисел второго и тем более высших классов.

По существу мы здесь имеем дело с гносеологическими трудностями, которые порождает идея актуальной бесконечности, выраженная в теоретико-множественной форме. Трудности эти наиболее ярко выражаются в вопросах, связанных с принципом выбора и совокупностью всех трансфинитных чисел хотя бы только второго класса.

В своих трудах Н. Н. Лузин постоянно вскрывал и анализировал указанные трудности. В этой книге он также неоднократно возвращается к этому анализу.

[6] (стр. 87). Элементы класса 2 были изучены П. С. Урысоном и П. С. Александровым, Mathem. Annalen, H. 1, 1927. Бэр указал конструкцию элемента класса 3 (Acta Math., т. 30, 1950 г.). Л. В. Келдыш показала, что элементы, построенные Бэром, являются каноническими («О гомеоморфности канонических элементов третьего класса», Матем. сборник, т. 41, 2, 1934 г.). Канонические элементы класса K_α найдены Л. В. Келдыш. Оказалось, что в каждом классе K_α, $\alpha > 2$ есть *один род канонических элементов*. Они между собой *гомеоморфны, топологически инвариантны*, и каждый элемент класса K_α есть сумма одного канонического элемента класса K_α и не более чем счетного множества элементов классов $< \alpha$ (см. Л. В. Келдыш, Структура B-множеств, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XVII, 1944 г).

[7] (стр. 88). Канонические элементы класса 2 рода 1° гомеоморфны каноническим элементам рода 2°, как показали

П. С. Александров и П. С. Урысон (Mathem. Annalen, H. 1, 1927 г.). Поэтому топологически эти два рода эквивалентны. Заметим, что канонические элементы класса 2 гомеоморфны области $\mathcal{J}$ и, следовательно, гомеоморфны некоторым множествам класса 0 и некоторым множествам класса 1. Это происходит в силу того, что сама фундаментальная область $\mathcal{J}$ есть абсолютное G_δ, которое не есть F_σ. Для $\alpha \geqslant 3$ элементы класса K_α топологически инвариантны, как показал М. А. Лаврентьев (Fundamenta Math., 6, 1924 г.).

Если объединить в один род канонические элементы рода 1° и рода 2° и назвать каноническим элементом класса 2 элемент класса 2, который получается выбрасыванием из совершенного множества P всюду плотной на P суммы счетного множества нигде не плотных на P замкнутых множеств, то имеет место следующее: *каждый элемент класса 2 является суммой одного канонического элемента класса 2 и одного множества класса* $\alpha \leqslant 1$.

Заметим, что для случая $\alpha > 2$ в настоящее время доказано более слабое утверждение. Именно: *каждый элемент класса* α, $\alpha > 2$ *является суммой одного канонического элемента класса* α *и не более чем счетного множества множеств классов* $< \alpha$ (Л. В. Келдыш, Структура B-множеств, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XVII, 1944 г.). Вопрос о возможности представления произвольного элемента класса α в виде суммы одного канонического элемента класса α и одного множества класса $< \alpha$ остается открытым до настоящего времени.

[8] (стр. 101). Для того чтобы существовала иррациональная точка ξ, общая всем π_m, достаточно, чтобы каждая порция π_m была высечена из соответствующего определяющего множества с помощью интервала Бэра, что, очевидно, всегда возможно.

[9] (стр. 105). Доказательство достаточности можно провести значительно проще: часть E, принадлежащая произвольному совершенному множеству P, содержит первый элемент ξ_β. Пусть π_β — порция P, отделяющая ξ_β от всех остальных точек множества $E \cdot P$. В порции π_β найдется порция π'_β множества P, не содержащая точки ξ_β и, следовательно, целиком принадлежащая к CE. Следовательно, E есть множество класса $\leqslant 1$.

[10] (стр. 118). Когда τ пробегает интервал Бэра Δ, то t пробегает часть T, заключенную в соответствующем интервале Бэра δ. Но эта часть T получается выбрасыванием из δ счетного множества интервалов Бэра δ'. Когда t пробегает δ', то функция $F_i(t)$ пробегает часть E_i класса $< \alpha$. Так как функция F_i регулярна, то часть E_i, которую пробегает $F_i(t)$, когда t пробегает T, получается выбрасыванием из части E_i, которую пробегает $F_i(t)$, когда t пробегает δ, всех частей E_i, которые пробегает $F_i(t)$, когда t пробегает все δ'. Отсюда следует, что когда t пробегает множество T, то каждое $F_i(t)$, а значит и $F(t)$, пробегает либо множество класса $< \alpha$, либо множество базы B_α, либо элемент класса α.

[11] (стр. 131). Речь идет о построении трансфинитной функции, которая каждому трансфинитному числу α ставила бы в соответствие пересчет всех трансфинитных чисел, меньших α. Автор говорит

о невозможности построения такой функции без аксиомы Цермело. Термин *«данное число α»* употребляется автором в том смысле, что число α задано каким-то законом, так что вместе с ним дан пересчет всех чисел, меньших α.

[12] (стр. 134). Заметим, что здесь доказано существование ***сколь угодно высоких подклассов***, но не доказано существование ***всех*** подклассов. На самом деле, ***не все подклассы существуют***. Легко видеть, что если трансфинитное число β имеет вид $\beta' + n$, где n — конечное число, большее 1, $n > 1$, то подкласса β не существует, так как множество, которому при некотором разложении в рассеянную последовательность элементов класса α соответствует число β, можно представить в виде рассеянной последовательности, которой соответствует число $\beta' + 1$. Для этого достаточно объединить сумму элементов $\eta_{\beta'+1} + \eta_{\beta'+2} + \dots + \eta_{\beta'+n}$ в один элемент $\mathfrak{h}_{\beta'+1}$.

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ III

[13] (стр. 136). Употребляемое автором название «аналитическое множество» не является общеупотребительным. В литературе эти множества известны под названием *А-множеств* или *суслинских множеств*. *А*-множествами называются множества, которые могут быть получены, исходя из интервалов с помощью некоторой теоретико-множественной операции, носящей название *А*-операции. Впоследствии было выяснено, что *А*-операция над интервалами пространства $\mathcal{I}_x$ эквивалентна операции непрерывного отображения пространства $\mathcal{I}_x$. *А*-операция была введена П. С. Александровым (Comptes Rendus, 1916, стр. 323). П. С. Александров показал, что всякое *В*-множество, лежащее в $\mathcal{I}_x$, может быть получено с помощью *А*-операции над интервалами, и использовал это для доказательства теоремы о мощности *В*-множеств. Затем Н. Н. Лузиным был поставлен вопрос: можно ли с помощью *А*-операции над интервалами получить множества, которые не являются *В*-множествами? Суслин дал утвердительный ответ на этот вопрос, показав, что ***существуют А-множества, которые не являются В-множествами.***

[14] (стр. 146). Легко заметить, что элементарное множество E есть замкнутое множество в пространстве $\mathcal{I}_{xy}$, так как каждая сумма S_n состоит из параллелепипедов Бэра *одного* порядка, и, следовательно, дополнение к S_n есть сумма параллелепипедов Бэра того же порядка, т. е. S_n есть множество класса 0. Следовательно, E есть самое большее — элемент класса 1 в пространстве $\mathcal{I}_{xy}$, т. е. замкнутое в $\mathcal{I}_{xy}$ множество.

[15] (стр. 172). Это легко доказать по индукции. Если $\mathfrak{E}$ — множество класса 0, то это непосредственно следует из теоремы Лебега. Пусть теперь утверждение верно для всех $\alpha' < \alpha$ и $\mathfrak{E}$ — множество класса α. Тогда $\mathfrak{E} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{E}_n$, причем $\mathfrak{E}_n$ — множество класса $< \alpha$.

Тогда, по условию, прообраз множества $\mathfrak{E}_n \cdot Q$, где Q — множество значений функции f, измерим B. Но прообраз множества $\mathfrak{E} \cdot Q$ есть предел прообразов $\mathfrak{E}_n \cdot E$

$$f^{-1}(\mathfrak{E} \cdot Q) = f^{-1}[\lim_{n\to\infty} \mathfrak{E}_n \cdot Q] \doteq \lim_{n\to\infty} f^{-1}(\mathfrak{E}_n \cdot Q)$$

и, следовательно, есть также множество, измеримое B.

[16] (стр. 178). См. П. С. Новиков, Sur les fonctions implicites mesurables B, Fundamenta Math., т. XVII, 1931 г.

[17] (стр. 196). Первоначально аналитические множества, или, иначе, A-множества были определены при помощи введенной П. С. Александровым A-операции над системой множеств, когда эти ножества являются порциями пространства $\mathcal{J}_{x_1 \ldots x_n}$. A-операция может быть произведена над счетной системой множеств произвольной структуры и определяется следующим образом. Пусть дана счетная система множеств, занумерованных при помощи конечных кортежей индексов:

$$\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\},$$

где $k = 1, 2, \ldots$ до бесконечности и для каждого k, $n_k = 1, 2 \ldots$ до бесконечности. Система $\{E_{n_1 \ldots n_k}\}$ называется *A-системой.*

Множества E_{n_1} с одним индексом называются *элементами A-системы первого ранга*, и вообще множества $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ с k индексами называются *элементами ранга k*. Если кортеж множества $E_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$ получается присоединением одного индекса n_{k+1} к кортежу множества $E_{n_1 \ldots n_k}$, то элемент $E_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$ называется *подчиненным* элементу $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Последовательность элементов A системы

$$E_{n_1}, E_{n_1 n_2}, E_{n_1 n_2 n_3}, \ldots E_{n_1 n_2 \ldots n_k}, E_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}, \ldots, \tag{1}$$

каждый последующий из которых подчинен предыдущему, называется *цепью*. Множество называется *результатом A-операции над системой* $\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$, если оно определяется равенством:

$$E = \sum E_{n_1} \cdot E_{n_1 n_2} \cdot E_{n_1 n_2 n_3} \ldots E_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot \ldots, \tag{2}$$

где сумма $\sum$ берется *по всевозможным цепям* (1). Таких цепей, очевидно, континуум. В том случае, когда все множества $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ являются параллелепипедами Бэра пространства $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, множество E, которое является результатом операции над системой (1), называется *A-множеством.* Покажем, что *A-множества тождественны с аналитическими множествами.* Для этого мы покажем что A-операция над системой параллелепипедов Бэра $\delta_{n_1 n_1 \ldots n_k}$ в области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ эквивалентна операции *проектирования* в область $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, лежащего в пространстве области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$ элемента класса 2 классификации Бэра. Действительно, пусть дана система параллелепипедов Бэра области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$

$$\{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$$

и множество E является результатом A-операции над этой системой. Каждому элементу первого ранга δ_{n_1} мы поставим в соответствие $m+1$-мерный параллелепипед π_{n_1} в области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$ так, чтобы проекции π_{n_1} в область $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ совпадали с δ_{n_1}, а проекции параллелепипедов π_{n_1} на ось OY были интервалами Бэра области $\mathcal{J}_y$ и не пересекались между собой. Параллелепипеды π_{n_1} называются *параллелепипедами первого ранга*. После того как построены $m+1$-мерные параллелепипеды $\pi_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ранга k, соответствующие параллелепипедам $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ранга k, $m+1$-мерные параллелепипеды $\pi_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$ ранга $k+1$ строятся следующим образом: 1) все параллелепипеды $\pi_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$, соответствующие параллелепипедам $\delta_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$, подчиненным $\delta_{n_1 \ldots n_k}$, содержатся в параллелепипеде $\pi_{n_1 \ldots n_k}$, соответствующем $\delta_{n_1 \ldots n_k}$, 2) проекции на ось OY параллелепипедов

$$\pi_{n_1 \ldots n_k 1},\ \pi_{n_1 \ldots n_k 2}, \ldots, \pi_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}, \ldots$$

являются интервалами Бэра в области $\mathcal{J}_y$ и попарно не пересекаются. Лежащее в области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$ множество $\mathfrak{E}$, определенное равенством

$$\mathfrak{E} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2 \ldots n_k} \pi_{n_1 n_2 \ldots n_k}, \tag{3}$$

является, очевидно, элементом класса 2 классификации Бэра.

Легко видеть, что проекция множества $\mathfrak{E}$ в области $\mathcal{J}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ совпадает с множеством E, которое является результатом A-операции над системой $\{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$. Действительно, каждой цепи

$$\delta_{n_1},\ \delta_{n_1 n_2}, \ldots, \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k},\ \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}, \ldots$$

соответствует убывающая последовательность параллелепипедов:

$$\pi_{n_1} \supset \pi_{n_1 n_2} \supset \ldots \supset \pi_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \pi_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}} \supset \ldots$$

и обратно, причем $\delta_{n_1 \ldots n_k}$ есть проекция в область $\mathcal{I}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$ параллелепипеда $\pi_{n_1 \ldots n_k}$. Следовательно, множество E есть проекция множества $\mathcal{E}$ и, значит,— результат A-операции над системой $\{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ тождественен с результатом проектирования множества, измеримого B, следовательно, E — аналитическое множество.

Обратно, если E есть аналитическое множество, определенное как проекция множества $\mathcal{E}$, заданного равенством (3), то мы немедленно построим A-операцию, определяющую E. Для этого достаточно каждому параллелепипеду $\pi_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ в области $\mathcal{I}_{x_1 x_2 \ldots x_m y}$ поставить в соответствие его проекцию $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ в область $\mathcal{I}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ и считать, что элемент $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}$ подчинен $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, если $\pi_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}$ содержится в $\pi_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Очевидно, что A-система $\{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ определяет множество E, которое является проекцией $\mathcal{E}$.

Геометрическая форма определения A-множества, введенная Н. Н. Лузиным, оказалась чрезвычайно плодотворной при изучении множеств, лежащих в евклидовом пространстве, так как она позволяет пользоваться геометрическими образами. Следует, однако, отметить, что первоначальная форма определения A-множества при помощи A-операции, данная П. С. Александровым и определенная формулой (2), дает возможность изучать не только множества, лежащие в пространствах Евклида, но также и множества, лежащие в абстрактных пространствах.

[18] (стр. 196). М. Я. Суслин для определения A-множества пользовался A-операцией. Другие способы задания A-множества были найдены позже.

Суслин непосредственно доказал сформулированную теорему. Данное в тексте доказательство принадлежит Н. Н. Лузину и дано значительно позже, когда им было введено понятие об отделимости и доказан первый принцип отделимости B для A-множеств.

[19] (стр. 209). Доказательство Н. Н. Лузина теоремы о сравнении решет, изложенное в следующем параграфе оригинала книги, содержит неточность. В самом конце доказательства автор, используя построенную им в предыдущем параграфе систему кривых L_i, приписывает ей более сильное, чем ей присуще, свойство универсальности, которым она не обладает. С целью исправления этого доказательства мы вводим в текст этот параграф, отмеченный звездочкой. Полностью сохраняя идею автора, изложенную в предыдущем номере, и лишь вводя необходимые технические усложнения, мы строим систему кривых $L_n^{i_1 \ldots i_k n}$, удовлетворяющих требуемому условию. После этого доказательство следующего параграфа сохраняется почти полностью. Небольшие изменения, введенные нами в текст следующего параграфа в связи с заменой кривых автора L_n

на кривые $L_n^{i_1 \dots i_k n}$, отмечены в тексте звездочками в начале и в конце. Весь остальной текст следующего параграфа является точным переводом с оригинала книги.

[20] (стр. 221). См. П. С. Новиков, Sur les fonctions implicites mesurables B, Fundamenta Math., т. XVII, 1931 г.

ПРИМЕЧАНИЕ К ГЛАВЕ IV

[21] (стр. 252). Здесь доказательство содержит небольшую неточность. Построенная система параллелепипедов π_1', π_1'', ..., π_k', π_k'' еще не удовлетворяет требуемым свойствам. Пока доказано только, что, каково бы ни было трансфинитное число γ, существует такая точка x и такая система параллелепипедов π_1', π_1'', ..., π_k', π_k'', что прямая P_x содержит несчетное множество точек на каждой из конституант $\vartheta_{\pi_i'}$, $\vartheta_{\pi_i''}$, $i = 1, 2, \dots, k$, причем индексы всех этих конституант превосходят γ. Точка x и система параллелепипедов π_1', π_1'', ..., π_k', π_k'' зависят от числа γ. Для того чтобы выбрать требуемую систему параллелепипедов, достаточно заметить, что различных чисел γ — несчетное множество, тогда как различных систем параллелепипедов π_1', π_1'', ..., π_k', π_k'' существует лишь счетное множество. Поэтому среди этих систем параллелепипедов найдется такая, которая соответствует несчетному множеству различных чисел γ. Эта система, очевидно, уже обладает требуемым свойством.

ПРИМЕЧАНИЕ К ГЛАВЕ V

[22] (стр. 272). Термины «аналитическое множество» порядка n и «аналитическое дополнение» порядка n не привились. В литературе употребительны термины *проективное множество класса* (A_n) и *проективное множество класса* (CA_n).

[23] (стр. 276). Оба эти вопроса решены отрицательно для $n = 2$ в работе: Kondo, L'uniformisation des complémentaires analytiques, Proc. Imp. Acad. Tohoku, 1937, т. XIII. Кондо доказал следующую теорему: *всякое проективное множество класса* (A_2) *или* (B_2) *есть проекция однозначного аналитического дополнения.* Эта теорема получена как следствие следующей теоремы: *Каково бы ни было плоское СА-множество* E, *в нем содержится такое однозначное СА-множество* $\mathfrak{E}$

$$\mathfrak{E} \subset E,$$

что проекция $\mathfrak{E}$ *на ось ОХ совпадает с проекцией* E.

[24] (стр. 276). Вопрос о покрытии однозначного плоского множества класса (A_2) однозначным плоским множеством класса (B_2) решается отрицательно. Это непосредственно следует из теоремы

П. С. Новикова о существовании двух непересекающихся множеств класса A_2 неотделимых посредством множеств класса B_2. (П. С. Новиков, Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe, Fundamenta Math., т. XXV, 1935, стр. 459—466). В самом деле, пусть E_1 и E_2 — два непересекающихся множества класса (A_2), неотделимых посредством множеств класса (B_2). Пусть, далее, $\mathfrak{E}$ — плоское множество класса (A_2), лежащее в области $\mathcal{J}_{xy}$ и состоящее из множества E_1, положенного на прямой $y = \eta_1$, и множества E_2, положенного на прямой $y = \eta_2$, $\eta_1 < \eta_2$, и η_1 и η_2 иррациональны. Очевидно, что $\mathfrak{E}$ — однозначное относительно оси OX плоское множество класса (A_2). Покажем, что $\mathfrak{E}$ нельзя покрыть однозначным множеством класса (B_2). Действительно, если бы это было возможно, то существовало бы плоское множество H класса (B_2), однозначное относительно оси OX и содержащее $\mathfrak{E}$. Пусть H_1 — пересечение H с прямой $y = \eta_1$, а H_2 — пересечение H с прямой $y = \eta_2$. Очевидно, что

$$E_1 \subset H_1 \quad \text{и} \quad E_2 \subset H_2$$

и оба множества H_1 и H_2 являются множествами класса (B_2). А так как множества E_1 и E_2 неотделимы посредством (B_2), то найдется прямая P_{x_0}, параллельная оси OY, пересекающая как H_1, так и H_2. Но H_1 и H_2 принадлежат к H, следовательно, прямая P_{x_0} пересекает H в двух точках, и значит, множество H не однозначно относительно оси OX, вопреки предположению. Итак, мы показали, что *существует однозначное плоское множество класса* (A_2), *которое нельзя покрыть однозначным плоским множеством класса* (B_2).

Совершенно так же можно показать, что *существует плоское CA-множество, однозначное относительно оси OX, которое нельзя покрыть множеством, измеримым B, однозначным относительно оси OX.*

Для $n > 2$ вопрос не решен в классическом смысле.

Исследование проективных множеств более высоких классов связано, как указывал Н. Н. Лузин (см. заключение), с трудностями, повидимому, не преодолимыми методами теории множеств. Большинство проблем здесь нельзя решить в классическом смысле, т. е. дать положительный или отрицательный ответ на поставленный вопрос. Но тогда можно ставить вопрос о непротиворечивости того или иного утверждения теории множеств (см. предисловие). Такая задача может решаться методами математической логики. П. С. Новиков показал, что *непротиворечиво предположение, что существует число* $N \geqslant 2$ *такое, что для всякого* $n \geqslant N$ *существуют два множества класса* (A_n), *неотделимые посредством множеств класса* (B_n). Отсюда, рассуждая так же, как для $n = 2$, заключаем, что *непротиворечиво предположение, что для всякого* $n \geqslant N$ *существует однозначное плоское множество класса* (A_n), *которое нельзя покрыть однозначным плоским множеством класса* (B_n).

Все остальные поставленные вопросы остаются открытыми даже для случая $n = 2$.

[25] (стр. 278). Для $n=2$ отрицательный ответ на этот вопрос непосредственно следует из теоремы Кондо (см. примеч. 23). Именно *Каждое множество класса* (A_2) *допускает регулярное параметрическое изображение*. Действительно, пусть E есть линейное (A_2), лежащее в области $\mathcal{I}_x$. В силу теоремы Кондо E есть проекция однозначного CA — множества $\mathfrak{E}$, лежащего в области $\mathcal{I}_{xy}$. Пусть теперь функции

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \\ t=G(x, y) \end{cases}$$

осуществляют гомеоморфное отображение области $\mathcal{I}_{xy}$ на область $\mathcal{I}_t$. Образ $\mathfrak{E}'$ множества $\mathfrak{E}$ при этом отображении есть линейное CA-множество, лежащее в области $\mathcal{I}_t$. При этом в силу однозначности $\mathfrak{E}$ разным значениям t из множества $\mathfrak{E}'$ соответствуют разные значения x, и x пробегает множество E, когда t пробегает множество $\mathfrak{E}'$. Следовательно, функция $x=\varphi(t)$ осуществляет регулярное параметрическое изображение множества E.

Для $n>2$ вопрос остается открытым.

[26] (стр. 282). Это рассуждение предполагает, что существуют множества (CA_{n-1}) и (A_{n-1}). Доказательство этого факта изложено в одном из последующих параграфов текста. Множества же (B_n) являются по определению одновременно $PC\ldots P\theta$ и $CP\ldots P\theta'$, где операция P употреблена ровно n раз.

Чтобы показать, что E есть (B_n), покажем, что оно есть одновременно проекция (CA_{n-1}) и дополнение к проекции (CA_{n-1}). Выберем в области $\mathcal{I}_{xy}$ проективное множество $\mathfrak{E}'$ класса $n-2$, проекция которого в $\mathcal{I}_x$ совпадает с E_1. Множество $\mathfrak{E}'+E_2$ есть, очевидно, плоское (CA_{n-1}), и проекция его в $\mathcal{I}_x$ совпадает с E. Следовательно, E есть проекция (CA_{n-1}). Теперь покажем, что E есть также дополнение к проекции (CA_{n-1}). Для этого достаточно показать, что CE есть проекция (CA_{n-1}). Выберем плоское проективное множество $\mathfrak{E}''$ класса $n-2$, проекция которого в $\mathcal{I}_x$ совпадает с разностью

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right)-E_2,$$

и рассмотрим множество $\left(0, \frac{1}{2}\right)-E_1+\mathfrak{E}''$. Это, очевидно, плоское (CA_{n-1}). Проекция его в $\mathcal{I}_x$, очевидно, совпадает с дополнением к E относительно $(0, 1)$. Следовательно, E есть дополнение к проекции (CA_{n-1}). Итак, E есть одновременно проекция (CA_{n-1}) и дополнение к проекции (CA_{n-1}), следовательно, E есть (B_n).

[27] (стр. 282). Этот вопрос решается отрицательно: в каждом классе n проективных множеств существуют множества класса B_n, которые нельзя получить, исходя из множества класса $n-1$ счетнократным применением операций суммы и пересечения. (См. Л. В. Канторович и Е. М. Ливенсон, «Memoir on the analytical operations and projective sets», Fund. Math., тт. XVIII (1932) и XX (1933))

23

Не только применением операции пересечения и суммы, но и счетнократным применением A-операции и операции взятия дополнения, исходя из множеств класса $n-1$ нельзя исчерпать всех множеств класса B_n. А. Н. Колмогоровым были определены новые более сложные операции над множествами: R-операции, частным случаем которых является A-операция. Эти операции изучены Ливенсоном и Канторовичем в упомянутой статье и А. А. Ляпуновым в статье «R-множества» (Труды Математич. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 40, 1953 г.). Множества, которые могут быть получены, исходя из множеств, измеримых B с помощью R-операции, повторенной счетное множество раз, носят название R-множеств. А. А. Ляпунов показал, что R-множества разбиваются на $\aleph_1$ классов. Все C-множества (получаемые из множеств, измеримых B счетнократным применением A-операции и операции взятия дополнения) входят в первый класс R-множеств. А. Н. Колмогоров и А. А. Ляпунов показали, что все R-множества измеримы и входят в класс (B_2). П. С. Новиков показал, что предположение о существовании в классе (B_2) неизмеримого множества не может привести к противоречию («О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств», Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951 г., т. XXXVII, стр. 315, теорема 4). Отсюда следует, что невозможно доказать, что R-множества исчерпывают класс (B_2). Точнее: непротиворечиво предположение, что в классе (B_2) содержится множество, не входящее в класс R-множеств.

[28] (стр. 286). Положительный ответ на первый из поставленных вопросов следует из теоремы Кондо (см. прим. 23). Что же касается до распространения теоремы Мазуркевича на проективные множества высших классов, то для случая $n=2$, как уже указано, имеется более сильная теорема — теорема Кондо. Для случая же $n>2$ вопрос сводится к проблеме о структуре однозначного множества, которое можно выделить из плоского множества класса (CA_{n-1}) так, чтобы проекция его в $\mathcal{I}_x$ совпадала с проекцией данного (CA_{n-1}). Однако едва ли можно надеяться на решение этой задачи в классическом смысле.

[29] (стр. 288). В классическом смысле эта проблема не решена. Как указывает Н. Н. Лузин (стр. 296), эта проблема, повидимому, принадлежит к числу тех проблем, решение которых в рамках теории множеств невозможно. Привлекая методы математической логики, можно ставить вопрос о ее непротиворечивости. П. С. Новиков доказал непротиворечивость утверждения, что существует проективная функция $f(x)$ однозначная, всюду определенная и такая, что изображающая ее кривая L есть CA-множество, не содержащее совершенного множества. (П. С. Новиков, О непротиворечивости некоторых положений теории множеств, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXXVIII, 1951 г., теорема 2.) Заметим, что кривая $t=\eta(y)$ П. С. Новикова есть проективная кривая класса (A_2). Однако из нее немедленно извлекается и CA-кривая L. Для этого достаточно заметить, что кривая $t=\eta(y)$, лежащая в плоскости $\mathcal{I}_{ty}$, есть проекция однозначного относительно $\mathcal{I}_{ty}$ CA-множества L', лежащего в пространстве $\mathcal{I}_{tyz}$. Множество L' представляет собой

пространственную кривую, которая является CA-множеством и определена для всех значений y области $\mathcal{J}_y$. Чтобы получить плоскую кривую L, достаточно гомеоморфно отобразить пространство $\mathcal{J}_{tyz}$ на пространство $\mathcal{J}_{ty}$ с помощью преобразования

$$y = y, \quad t = G(t, z).$$

Кривая П. С. Новикова $t = \eta(y)$ строится средствами классической теории множеств. Но для доказательства непротиворечивости предположения, что эта кривая не содержит совершенного множества, он опирается на результат Гёделя — о непротиворечивости континуум-гипотезы (см. Гёдель, Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, перев. В. А. Маркова, Успехи матем. наук, 1948 г., т. III, вып. 1 (23)). Поэтому дальнейшие заключения Н. Н. Лузина о выводимости континуум-гипотезы из отрицательного решения указанной проблемы здесь теряют смысл.

[30] (стр. 290). Из теоремы Кондо (см. примечание 23) непосредственно следует, что каждое множество $\mathcal{E}$ класса (A_2) можно рассматривать как просеянное при помощи счетного решета (CA). Для этого достаточно в каждой полосе $\left(\frac{1}{n} < y < \frac{1}{n-1}\right)$ области $\mathcal{J}_{xy}$ поместить однозначное CA-множество E_n, проекция которого в область $\mathcal{J}_x$ совпадает с $\mathcal{E}$. Множество $\mathcal{E}$ просеяно с помощью плоского решета (CA)

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$$

Что же касается до просеивания с помощью прямолинейного решета C, составленного из (B_2) множеств или, что то же — A-операции над множествами класса (B_2), то, как показали Канторович и Ливенсон, она всегда приводит к множествам класса (B_2). (См. Kantorovitch and Livenson, Fundementa Math., тт. XVIII, XX.) Множества, которые получаются из A- и CA-множеств с помощью счетнократного применения A-операции и операции взятия дополнения, носящие название C-множеств, были введены А. Н. Колмогоровым. Им же, независимо от Е. А. Селивановского, была доказана их измеримость и наличие свойства Бэра. Однако работа А. Н. Колмогорова осталась неопубликованной. Она будет опубликована в журнале «Успехи матем. наук».

[31] (стр. 291). Результаты Канторовича и Ливенсона опубликованы в статье «Memoir on the analytical operations and projective sets» (Fundamenta Math., тт. XVIII (1932), XX (1933)).

[32] (стр. 291). Проблема об отделимости проективных множеств второго класса была решена П. С. Новиковым «Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe» (Fundamenta Math., т. XXV (1935 г.) 459—466). Законы отделимости здесь оказались обращенными, т. е. они получаются из законов отделимости для A-множеств, если заменить A-множества через CA_2-множества

а CA-множества через A_2-множество. Основные принципы отделимости во втором классе проективных множеств формулируются так:

Теорема I. *Два множества класса* (CA_2) *без общих точек всегда отделимы с помощью двух множеств класса* (B_2).

Теорема II. *Если удалить из двух множеств* (CA_2) *их общую часть, то оставшиеся части отделимы с помощью A_2-множеств.*

Теорема III. *Если удалить из двух множеств* (A_2) *их общую часть, то оставшиеся множества отделимы с помощью множеств* (A_2).

Теорема IV. *Существуют два множества* (A_2) *без общих точек, неотделимые при помощи множеств* (B_2).

Для случая $n > 2$ в классическом смысле ничего не доказано. Однако П. С. Новиков показал, что непротиворечиво предположение, что для всех n, бо́льших некоторого N, в n-м классе проективных множеств принципы отделимости такие же, как и во втором классе (т. е. обращенные по отношению к классу A-множеств). (См. Новиков, О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXXVIII, 1951 г.)

[33] (стр. 297). Для построения U' рассмотрим в плоскости YOZ построенный выше универсальный элемент E класса 1, т. е. плоский элемент класса 1, который пересекается с прямыми, параллельными оси OZ, по всевозможным линейным замкнутым множествам (см. стр. 126). Обозначим через $E_{r_1r_2}$ часть множества E, заключенную в полосе $(r_1 < z < r_2)$, а через $e_{r_1r_2}$ множество тех точек M области $\mathcal{T}_y$, для которых прямая P_M^z, проходящая через M параллельно оси OZ, пересекает $E_{r_1r_2}$ не более чем в одной точке. Все множества $e_{r_1r_2}$ являются аналитическими дополнениями (стр. 261). Рассмотрим множество

$$H = CPE + \sum_{r_1, r_2} e_{r_1r_2} \cdot PE_{r_1r_2}.$$

Легко видеть, что H есть множество всех тех точек M области $\mathcal{T}_y$, в которых прямая P_M^z либо вовсе не пересекает множества E, либо же пересекает его по множеству, содержащему хотя бы одну изолированную точку, т. е. несовершенному. Так как все множества $PE_{r_1r_2}$ аналитические, а $e_{r_1r_2}$ — аналитические дополнения, то множество H есть либо множество класса (A_2), либо (B_2), либо проективного класса 1. Пусть теперь H' — множество всех точек области $\mathcal{T}_{yz}$, проекция которых в $\mathcal{T}_y$ принадлежит к H. Очевидно, что H' есть либо (A_2), либо (B_2), либо проективного класса 1. Положим теперь

$$U' = E + H'.$$

Очевидно, что всякая прямая, параллельная оси OZ, пересекает U

по совершенному (в $\mathcal{J}_z$) множеству, и что U' универсально для всех линейных совершенных множеств. Так как E — элемент класса 1, а H' либо множество класса (A_2), либо (B_2), либо класса 1, то и U' есть множество либо класса (A_2), либо (B_2), либо класса 1.

[34] (стр. 313). Природа поверхности Лебега была изучена Нейманом и Куратовским. Оказалось, что эта поверхность представляет собой проективное множество второго класса, точнее — пересечение A-множества и дополнения к A-множеству.

ПРИМЕЧАНИЯ К ЗАКЛЮЧЕНИЮ

[35] (к стр. 321). Предположение Н. Н. Лузина о невозможности доказать измеримость проективных множеств в настоящее время полностью оправдалось. Именно, П. С. Новиков построил проективное множество класса (B_2), относительно которого непротиворечиво утверждение, что оно неизмеримо (П. С. Новиков, О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951 г., т. XXXVIII, стр. 315, теорема 4). Отсюда следует, что невозможно доказать измеримость проективных множеств. Однако вопрос о возможности доказательства методами теории множеств существования неизмеримого проективного множества в настоящее время еще остается открытым, так как пока не доказана непротиворечивость утверждения об измеримости проективных множеств.

ПРИМЕЧАНИЯ К ДОПОЛНЕНИЮ I

[36] (к стр. 324). Предполагается, что $f(x)$ есть функция, характеристическая для множества всех точек, которые изображаются непрерывными дробями, у которых совокупность неполных частных $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ образует *составную* последовательность натуральных чисел.

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИИ ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Редактор *Е. М. Ландис*
Техн. редактор *Л. А. Голубкова*
Корректор *Л. О. Сечейко*

*

Подписано к печати 13/VI 1953 г.
Бумага 84×108/32. 5,63 бум. л. 18,45 печ. л.
18,9 уч.-изд. л. 40 970 тип. зн. в печ. л.
Тираж 6000 экз. Т-02897.
Цена книги 9 руб. 45 коп. Переплет 2 р
Заказ № 284.

4-я типография им. Евг. Соколовой
Союзполиграфпрома Главиздата
Министерства культуры СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.